克立格估计的分析解释与协方差函数的代数确定

边少锋[1]　Joachim Menz[2]

（1. 中国科学院测量与地球物理研究所，武汉　430077；2. TU Bergakademie Freiberg，09599 Freiberg，Germany）

摘要：首先引入利用旋转面作为基函数的函数逼近概念，在此基础上经过复杂的矩阵推导证明泛克立格法可表示为传统的带权最小二乘多项式拟合与以旋转面作为基函数的函数逼近，并在一定条件下（随机场高度连续无块金效应）论证了协方差（即旋转面）的参数可通过数学分析的方法确定，给出了以高斯函数为例确定协方差函数的两个准则.

关键词：克立格估计；协方差函数；地质统计学.
中图分类号：P628^{+}.2；O212.4　　　文献标识码：A
文章编号：1000－2383(2000)02－0195－06
作者简介：边少锋，男，教授，1961 年生，1992 年毕业于武汉测绘科技大学，获博士学位，目前主要从事地球重力场、空间大地测量等研究.

克立格法是数学地质中广泛使用的一种基于随机过程的统计预测法[1~3]. 理论上讲，克立格估计具有估计方差最小的统计特性. 克立格应用上最关键的是半变异函数即协方差函数的确定，但是由于观测值不是很多，实用上拟合一个比较准确的协方差函数存在一定的困难. 克立格估计是否具有估计方差最小的统计特性？从统计的观点看在一定条件下它的确是方差最小的最优估计，但是从数学分析的观点看，它仅仅属于一类比较特殊的逼近方法，即用旋转曲面生成的基函数进行函数逼近. 这一点已被许多学者所证实[1,4,5]. 本文将侧重于克立格估计的分析解释.

1　以旋转面作为基函数的函数逼近

设以节点$(x_i,\ y_i)$为中心生成的旋转面为

$$k(x-x_i,y-y_i)=k(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}),\qquad(1)$$

以此为基础可建立其线性组合

$$f(x,y)=a_1k_1(r_1)+a_2k_2(r_2)+\cdots+a_ik_i(r_i)+\cdots+a_nk_n(r_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ik_i(r_i).\qquad(2)$$

再设数据点为 $z_i=z(x_i,y_i)$，$i=1,2\cdots,n$，在数据点上可建立如下插值条件

$$a_1k(r_{ij})+a_2k(r_{ij})+\cdots+a_nk(r_{nj})=z_j,\quad j=1,2,\cdots n.$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.\qquad(3)$$

式中：$k_{ij}=k(r_{ij})=k(\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2})$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 适当地选择节点和基函数可保证系数矩阵非奇异，因此由(3)式可得

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.\qquad(4)$$

将(4)式代入(2)式可建立未观测点$(x_{\mathrm p},y_{\mathrm p})$的插值函数为

$$\hat z(x_{\mathrm p},y_{\mathrm p})=\sum_{i=1}^{n}k(x_{\mathrm p}-x_i,y_{\mathrm p}-y_i)a_i=(k_{\mathrm p1},k_{\mathrm p2},\cdots,k_{\mathrm pn})\begin{pmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.\qquad(5)$$

如将基函数取为各向同性的协方差函数

$$k(x-x_i,y-y_i)=C(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}),\qquad(6)$$

则有

$$\hat z(x_{\mathrm p},y_{\mathrm p})=$$

收稿日期：1999－01－30
基金项目：德国 DFG 项目“地质统计学模型下的矿山综合评价”；中国科学院测量与地球物理研究所访问学者基金.

$$(c_{p1}, c_{p2}, \cdots, c_{pn})\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \square & & \square \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ \square \\ z_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

它形式上与已知数学期望的简单克立格估计相同.

2　带未知均值的克立格估计及其分析解释

设 $\boldsymbol{z}(x)$ 是具有常数数学期望的平稳随机过程,我们的目的是通过观测值 $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}(x_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的加权线性组合

$$\hat{\boldsymbol{z}}(x_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \boldsymbol{z}_i \tag{8}$$

最优地确定 $\hat{\boldsymbol{z}}(x_p)$,式中 w_i 为待定的克立格权,利用条件极值可推得确定系数 w_i 的方程组为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & 1 \\ \square & & \square & \square \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ \square \\ w_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{p1} \\ \square \\ c_{pn} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9a}$$

式中: μ 为拉格朗日乘数,引入矩阵记号

$$\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}, \boldsymbol{I} = \underbrace{(1, 1, \cdots, 1)}_{n}^{T}, \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T, \boldsymbol{c}_p = (c_{p1}, c_{p2}, \cdots, c_{pn})^T. \tag{9b}$$

(8)式可改写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I}^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_p \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9c}$$

权系数与拉格朗日乘数可分别求解. 由(9c)式有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{I}\mu = \boldsymbol{c}_p. \tag{10}$$

因此有 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{c}_p + \boldsymbol{I}\mu)$. (11)

(11)式代入(9c)式有

$$\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{c}_p + \boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}\mu = 1. \tag{12}$$

因为 $\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}$ 只是一个数,故有

$$\mu = (1 - \boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{c}_p)/\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}. \tag{13}$$

(13)式再回头代入(11)式可得

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}^{-1}[\boldsymbol{c}_p + \boldsymbol{I}(1 - \boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{c}_p)/\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}]. \tag{14}$$

再将(14)式代入(8)式可得

$$\hat{\boldsymbol{z}}(x_p) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{z} = \left[\boldsymbol{c}_p^T + \frac{(1 - \boldsymbol{c}_p^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I})\boldsymbol{I}^T}{\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}}\right]\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}_p^T\boldsymbol{C}^{-1}\left(\boldsymbol{z} - \frac{\boldsymbol{I}\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}}\right) + \frac{\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}}. \tag{15}$$

记

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}/\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{I}. \tag{16}$$

$\boldsymbol{M}$ 可理解为观测值的广义平均值,当观测值独立 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$ 或观测值弱相关 $\boldsymbol{C} \approx \boldsymbol{E}$,则有

$$\boldsymbol{M} \approx \frac{\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{I}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{z}_i. \tag{17}$$

即为简单平均值.

在(15)式两端同时减去 $\boldsymbol{M}$ 可得

$$\hat{\boldsymbol{z}}(x_p) - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{c}_p\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{M}) = (c_{p1}, c_{p2}, \cdots, c_{pn}) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \square & & \square \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{M} \\ \square \\ \boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{M} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

(18)式与(7)式相对比可知带一个未知均值的克立格估计可解释为观测值与观测值的广义均值之差被旋转曲面生成的基函数所逼近.

3　泛克立格估计及其分析解释

设平稳随机过程 $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{m}(x) + \boldsymbol{s}(x)$ 由二部分组成,第一部分 $\boldsymbol{m}(x)$ 为确定性漂移,第二部分 $\boldsymbol{s}(x)$ 为平稳随机信号. 一般漂移可表示为多项式形式

$$\boldsymbol{m}(x) = \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{f}_i(x)a_i = \boldsymbol{f}^T(x)\boldsymbol{a}. \tag{19}$$

式中: $\boldsymbol{f}^T(x) = [\boldsymbol{f}_0(x), \boldsymbol{f}_1(x), \cdots, \boldsymbol{f}_k(x)] = [1, x, y, xy\cdots]$, $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_k)^T$. 令 $\boldsymbol{z}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 为观测值, $\hat{\boldsymbol{z}}(x_p)$ 为待估值,并可由观测值的加权线性组合求出

$$\hat{\boldsymbol{z}}(x_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i\boldsymbol{z}_i. \tag{20}$$

由克立格估计准则应有

$$\boldsymbol{E}[\hat{\boldsymbol{z}}(x_p) - \sum_{i=1}^{n} w_i\boldsymbol{z}_i]^2 \text{ 为最小},$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\boldsymbol{f}_I(x_i) = \boldsymbol{f}(x_p), I = 0, 1, \cdots k. \tag{21}$$

限于篇幅,略去推导过程可得求解克立格权与拉格朗日乘数的方程组为[3]

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}^T & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_p \\ \boldsymbol{f}_p \end{pmatrix}. \tag{22}$$

式中: $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_k)^T$, $\boldsymbol{f}^T = [\boldsymbol{f}_0(x), \boldsymbol{f}_1(x), \cdots, \boldsymbol{f}_k(x)]^T$, $\boldsymbol{F}$ 为由漂移部分组成的系数阵. $\boldsymbol{C}$ 非奇异,由(22)式可得

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{c}_p - \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}). \tag{23}$$

(23)式代入(22)式，易知

$$\boldsymbol{\mu}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}),\tag{24}$$

然后将(24)式再次回代至(23)式，可知克立格权系数矢量为

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{C}^{-1}[\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}})].\tag{25}$$

(25)式代入(20)式有

$$\begin{aligned}\hat{z}(x_{\mathrm{p}})&=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\\&[\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}-(\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}=\\&\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}+\\&\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}[\boldsymbol{z}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}].\end{aligned}\tag{26}$$

记

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}.\tag{27}$$

它就是(19)式的系统参数，因此(26)式可改写为

$$\hat{z}(x_{\mathrm{p}})=\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}),\tag{28}$$

或

$$\hat{z}(x_{\mathrm{p}})-\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}).\tag{29}$$

(29)式写成元素形式为 $\hat{z}(x_{\mathrm{p}})-\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=$

$$(c_{\mathrm{p}1},c_{\mathrm{p}2},\cdots,c_{\mathrm{p}n})\cdot\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \square&&\square\\ c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_1-\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\\ \square\\ z_n-\boldsymbol{f}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\end{pmatrix}.\tag{30}$$

(30)式仍与(7)式类似，因此可以说在除去系统部分后，泛克立格与使用旋转面作为基函数的函数逼近类似.

此外与(22)式直接解泛克立格方程组相比，本文(27)，(28)式先求系统漂移部分再求随机信号部分，既降低了求逆矩阵阶数，又提高了计算效率，并且也易于区分漂移部分与随机部分的大小量级.

4　确定协方差函数的两个代数准则

本节我们基于一定的数学分析观点来分析协方差函数参数的选取. 为讨论方便以一维为例，(5)式略去下标 p 可改写为

$$\hat{z}(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i k(x-x_i).\tag{31}$$

(31)式表明预测值只是函数 $k(x)$移位后的线性组合. 取 $k(x)$为最常用的 Gauss 函数

$$C(x)=\exp(-x^2/d^2).\tag{32}$$

Gauss 函数衰减很快，它的局部支持区间受到了参数 d 的强烈控制. 不同参数的 Gauss 函数可示于图1，从图 1 可看出，当 d 较小时，Gauss 函数类似于不

图 1　不同参数下的 Gauss 函数

Fig. 1　Gaussian functions with different parameters

图 2　Gauss 函数的移位线性组合

Fig. 2　Linear combinations of Gaussian functions

连续的脉冲函数 $\delta(x)$.

作为理想化的一个特例，我们考查 $a_i\equiv1$，$x_i=i$ 时不同参数的 Gauss 函数之线性组合构成的函数形态. $d=1.0$，$d=0.5$ 和 $d=0.1$ 时 Gauss 函数移位后的线性组合可示于图 2. 实际上 $a_i\equiv1$ 隐含着采样值(或观测值)为一水平直线的采样，理想的逼近结果也应为一条直线. 但事实并非如此，图 2c 中的曲线类似于一把梳子，这是由于 $d=0.1$ 时 Gauss 函数的支撑区间太窄所致. 图 2b 中的曲线已较图 2a 好得多，但仍有许多连续的极大值和极小值，类似于一条正余弦曲线. 只有图 2a 达到了较理想的效果. 这些事实说明协方差函数的逼近效果的确与其参数有很大关系，并且可以肯定地说合理的参数是存在的.

首先我们假定信噪比或噪声部分已被确定或已

另外考虑,此处我们只考虑连续的信号部分.

准则 **1** 协方差参数应使得

$$d=1/\alpha=\min,$$

$$\frac{2[\exp(-\alpha^2/4)+\exp(-9\alpha^2/4)+\cdots]}{1+2[\exp(-\alpha^2)+\exp(-4\alpha^2)+\exp(-9\alpha^2)\cdots]}=1. \tag{33}$$

证明:(1)$d=\min$ 意味着 Gauss 函数具有较小的支撑区间,由此形成的矩阵带宽将比较小.

(2)在假定 $z(x)$平稳的情况下,半节点的预测值与节点上的预测值应有相同的数学期望,即

$$E\{z(i+1/2)\}=E\{z(i)\}. \tag{34}$$

在 $E\{z(x)\}=C$(C 为常数)或 $\lim C\rightarrow 0$)的情况下,由于 a_i 为观测值的线性组合,有

$$E\{a_i\}\equiv C, \lim C\rightarrow 0. \tag{35}$$

故(35)式代入(34)式有

$$2[\exp(-\alpha^2/4)+\exp(-9\alpha^2/4)+\cdots]=1+2[\exp(-\alpha^2)+\exp(-4\alpha^2)+\cdots]. \tag{36}$$

(36)式稍加变形也即(33)式,此处(33)式亦可从代数上理解为一条水平直线被核函数移位生成的基函数所逼近时,其半节点处的值应与节点处的值相等.证毕.

为求出合理的协方差参数值,引入比值函数

$$R(d=1/\alpha)=\frac{2[e^{-\alpha^2/4}+e^{-9\alpha^2/4}+e^{-25\alpha^2/4}+e^{-49\alpha^2/4}]}{1+2[e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+e^{-9\alpha^2}+e^{-16\alpha^2}]}. \tag{37}$$

式中考虑到 Gauss 函数衰减很快,对区间[-4,4]以外的 Gauss 函数已视其为零略去不计.

为更好地了解比值函数随 d 的变化规律,图 3 画出了它的变化曲线.从图 3 可得出两条主要的结论:(1)合理的参数应位于区间[0.8,1.7],它可以使半节点与节点处的协方差函数线性组合大致相等;(2)$d<0.5$ 的参数应尽量避免使用,因为它使半节点处的协方差函数的线性组合远小于节点处协方差函数的线性组合.

准则 **2** Gauss 函数的参数可比照 B 样条函数确定.

说明:B 样条函数在函数拟合或逼近中具有许多优点因而获得了非常广泛的应用.n 次 B 样条在数学上可方便地由矩形脉冲经 $n-1$ 次卷积得到

$$B_n(x)=\underbrace{\pi(x)*\pi(x)*\cdots*\pi(x)}_{n-1}, \tag{38}$$

式中:$*$ 表示卷积,$\pi(x)$是矩形脉冲函数

图 3 比值函数随参数 d 变化曲线

Fig.3 The ratio function with respect to the parameter d

$$\pi(x)=\begin{cases}1, & |x|<1/2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{39}$$

特别地,对 3 次 B 样条有

$$B_3(x)=\begin{cases}1/2|x|^3-x^2+2/3, & |x|\leqslant 1;\\ 1/6(2-|x|)^3, & 1<|x|<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{40}$$

除有限支撑外,B 样条与 Gauss 函数比较相似,都为钟形函数.Martheon[4]和 Dubrule[5]曾讨论过克立格估计和样条间的等效性和相似性,特别是 Unser 等[6]研究了 Gauss 函数与 B 样条函数之间的相似关系,并建立了如下逼近公式

$$B_n(x)\approx\sqrt{\frac{6}{\pi(n+1)}}\exp\left[-\frac{6x^2}{n+1}\right]. \tag{41}$$

取 $n=3$,3 次 B 样条与 Gauss 函数已对比列于图 4.(41)式 Gauss 函数的参数转化为常用的参数形式有

$$d=\sqrt{n+1/6}. \tag{42}$$

不同阶数的样条对应的 Gauss 函数参数可列于表 1.一般 3~7 次的样条均可取得较好的逼近效果,否则阶次过低或过高的逼近结果将不是太粗糙就是太平滑或支撑区间过宽.因此由类比可知 Gauss 函数的参数亦应与此相应,宜取为[0.82,1.16].这与我们前述的准则 1 的估计是相一致的.

表 **1** 不同阶次样条对应的 **Gauss** 函数参数

Table 1 Determining parameters of Gaussian functions by splines with different orders

n	1	2	3	4	5	6	7
$6/(n+1)$	3	2	3/2	6/5	1	6/7	6/8
d	0.58	0.71	0.82	0.91	1.00	1.08	1.16

本节以上推导是以格网为单位长度导出的,如格网非单位长度时,可通过下列变换化格网为单位

图 4　$n=3$ 时 B 样条与 Gauss 函数对比

Fig. 4　Comparison between a Gaussian function and its equivalent cubic spline

长度

$$x'=x/\Delta x, y'=y/\Delta y. \tag{43}$$

式中：Δx，Δy 分别为格网长度，x，y 和 x'，y' 分别为变换前后的坐标.

在实际应用时，数据一般是非格网散布在一定区域. 设 S 为区域面积，N 为域内数据个数，在假定 x 和 y 方向无异向性时等效的格网长度可直观地由下式求出：$\Delta x=\Delta y=\sqrt{S/N}$. 试算证明用这种方法确定散乱数据的等效格网长度效果比较好.

5　算例

设理论模型为：$f(x)=\sin 2\pi x$，并令采样间距 $\Delta x=0.0625$，在 $0<x<1$ 区间共有 17 个数据点，以这些数据点为基础，用 $d=0.1$，$d=0.5$ 和 $d=1.0$（以 $\Delta x=0.0625$ 为单位长度）时的 Gauss 函数去逼近该理论模型，图 5 画出了相应的逼近曲线示意图. 观察图 5 可以发现 $d=0.1$ 和 $d=0.5$ 时 Gauss 函数的逼近曲面产生了许多不应有的低谷和高峰，与原理论模型相差较大，这是由于 $d=0.1$ 和 $d=0.5$ 时 Gauss 函数支撑区间太窄，在半节点上达不到应有的预期结果，在半节点上出现了许多不应有的极小值. 而 $d=1.0$ 时 Gauss 函数产生了非常好的逼近效果，几乎与理论模型一致.

6　结论

应该说平稳过程有着确定的谱 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w})$，通过 Wiener-Chintsch 定理

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}^{-1}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{w})\}, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}\{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\}. \tag{44}$$

它又有着确定的协方差函数 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$，式中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 分别为 Fourier 正演和反演.

但是从另一方面来看，在一定条件下克立格可理解为由旋转曲面生成的基函数进行的函数逼近，该基函数并不一定要取为被逼近过程的协方差函数，具有一定的可选择性，并且，由于矩阵求逆的数

图 5　$d=0.1$，$d=0.5$ 和 $d=1.0$ 时 Gauss 函数逼近正弦曲线示意图

Fig. 5　Approximated sine curve by a Gaussian function with $d=0.1$, $d=0.5$ and $d=1.0$ respectively

值稳定性等原因这种逼近还与观测数据的取样密度存在一定的内在联系.对于同样一个随机过程,采样密度变了,基函数(即"协方差函数")中的参数亦应相应调整,否则将导致数值不稳定性出现(如矩阵求逆失败).

基于本文的研究可得如下结论:(1)协方差参数在一定程度上与采样数据的密度(或间隔)有一定联系.(2)以一维 Gauss 函数为例,设 Δx 为数据间隔,则其最优参数应取 $d=[0.8\Delta x, 1.7\Delta x]$,更具体的值应视实际情况或结合协方差拟合再行确定.(3)对于 Gauss 函数,$d<0.5$ 的参数应该避免使用,否则将在逼近函数中出现许多不应有的极大值或极小值.(4)其他协方差函数参数的代数确定可依本文准则 1 或准则 2 类似确定,但应注意这些准则的前提是随机场高度连续或噪声部分已被事先确定,否则不宜盲目使用.从这一点来说,这也是本文准则的一个缺陷.

参考文献:

[1] Cressie N. Statistics for spatial data [M]. New York: John Wiley & Sons, 1991.

[2] Wackernagel H. Multivariate geo-statistics [M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[3] Menz J. Anwendung der Geostatistik zur Gebirgs-und Lager-stattengeometrisierung [M]. TU Bergakademie, Freiberg: Forschungbericht, 1996.

[4] Martheon G. Splines and Kriging: their formal equivalence in down to earth statistics [A]. In: Merriarn D, ed. Solutions looking for geological patterns [C]. Syracuse Univ Geology Contribution, 1981, 8: 77~97.

[5] Dubrule O. Comparing splines and Kriging [J]. Computer & Geosciences, 1984, 10(2): 327~328.

[6] Unser M, Aldroubi A. Polynomial spline and wavelets: a signal processing perspective [A]. In: Chui C K, ed. Wavelet: a tutorial in theory and applications [C]. Boston: Academic Press, 1992. 91~123.

ANALYTICAL INTERPRETATION TO KRIGING ESTIMATION AND ALGEBRAIC DETERMINATION OF COVARIANCE FUNCTION'S PARAMETER

Bian Shaofeng[1] Joachim Menz[2]

(1. *The Surveying and Geophysical Institute of Chinese Academy of Sciences*, *Wuhan*, 430077, *China*; 2. *TU Bergakademie Freiberg*, 09599 *Freiberg*, *Germany*)

Abstract: The analytical interpretation to Kriging estimation and the algebraic determination of a covariance function's parameter are presented. This paper first introduces the concept of function approximation using a rotating surface as a basic function. Then it is demonstrated that the universal Kriging may be expressed as the traditional weighted least square fitting and as the function approximation with a rotating surface as a basic function. It is also demonstrated that the parameter of a covariance function (i.e. a rotating surface) can be determined by the mathematical analysis on a certain condition (i.e. a highly continuous lump gold-free effect in a random field). Finally, this paper presents two principles for the determination of a covariance function's parameter with the Gaussian function as an example: one is formulated through analysis of the linear combinations of the shifted Gaussian functions, and the other is derived from the equivalence between B-splines and Gaussian functions.

Key words: Kriging estimation; covariance function; geo-statistics.