

改进的 Theis 井流模型及其解析解

——考虑含水层顶板的挠曲作用

王旭升, 陈崇希

(中国地质大学环境地质研究所, 湖北武汉 430074)

摘要: 传统承压含水层井流理论都假定承压含水层顶面总应力不变, 其隐含的意义是忽略含水层顶板的刚度, 从而忽略了顶板弯曲对含水层释水的影响。指出考虑顶板弯曲时, 抽水井周围承压含水层顶部的总应力将减小, 从而产生比传统理论估计更大的地下水降深, 并结合弹性板理论对 Theis 井流模型作出了改进, 新模型的解析解证明 Theis 模型计算的地下水水头降深偏低。

关键词: 地下水; 井流模型; 挠曲。

中图分类号: P641.2 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-2383(2002)02-0199-04

作者简介: 王旭升(1974—), 男, 水文学与水资源博士研究生, E-mail: wxsh@cug.edu.cn

抽水井作用下地下流体的运动, 是水文地质学、渗流力学中经久不衰的研究课题。1935 年 Theis^[1] 根据热传导问题与抽水井周围地下水运动问题的相似性, 提出了含水层水头降深随时间变化的计算公式, 后经 Jacob^[2] 加以论证和完善, 形成了被称为 Theis 模型的地下水非稳定流的解析模型, 开创了地下水动力学研究的崭新局面。该模型包含对含水层—井系统条件的某些假定, 这些假定被以后用于其他水文地质条件的井流模型所沿用。

然而, 所有的承压含水层—井孔模型都隐含着一个似乎还没有引起关注的假定, 即作用在承压含水层顶面上的总应力保持不变, 该假定是建立传统的承压含水层地下水运动理论的基础之一。Theis 并没有对承压含水层与其顶板的力学关系进行阐述, 完成这一任务的是 Jacob, 他提出含水层顶部负荷(总应力)保持不变的假定, 这种假定沿用至今。我们认为, 该假定应该是有前提的, 即含水层的顶板必须没有刚度。实际上, 由于抽水引起含水层不均匀压缩, 必然导致顶板弯曲, 地层或多或少具有一定的刚度, 在弯曲时产生支撑力, 从而改变传递到含水层的总应力。陈崇希等^[3] 首先意识到这一点, 认为这可能是 Theis 模型的理论水头降深在抽水初期低于实测

值的一个重要原因。

设一个水平无限大的承压含水层中有一完整井抽水引起地下水的非稳定流动, 顶板为完全不透水体, 见图 1。根据 Terzaghi 有效应力原理, 作用在含水层顶部接触面上的总应力为 σ , 含水层骨架有效应力为 σ' , 含水层内水压力为 p , 则有^[4]:

$$\sigma = \sigma' + p.$$

我们认为, 从含水层抽取地下水, 不仅会引起 σ' , p 的变化 $\Delta\sigma'$, Δp , 也会由于顶板弯曲导致 σ 的变化:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta p. \quad (1)$$

假定含水层只在垂向上发生弹性压缩, 则:

$$\Delta M/M = \alpha \Delta\sigma'.$$

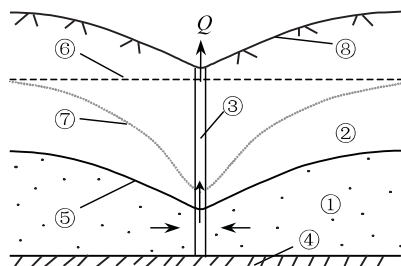


图 1 承压含水层井流模型

Fig. 1 Conceptive of confined aquifer and well flow model
图中箭头表示水的流向: ①承压含水层; ②承压含水层的隔水顶板; ③抽水井; ④承压含水层的隔水底板; ⑤含水层顶面; ⑥初始水头; ⑦抽水后的水头; ⑧地面; Q: 抽水流量

其中: M 为含水层的厚度, ΔM 即压缩量, α 是含水层介质的压缩系数.

同时, 含水层水头变化与水压力变化的关系为:

$$\Delta p = -\gamma_w s. \tag{2}$$

其中: s 为承压水的水头降深(初始水头与当前水头之差), γ_w 为水的容重. 把含水层孔隙压缩和水的压缩共同作为贮存量的释放, 可以得到单位水平面积含水层柱体的释水量:

$$\Delta V = \Delta M - n\beta M \Delta p = \alpha M \Delta \sigma' + n\gamma_w \beta M s. \tag{3}$$

β 为水的压缩系数. 过去的井流模型中假定总应力 σ 不随时间变化, 因此 $\Delta \sigma' = -\Delta p = \gamma_w s$, 则:

$$\Delta V = \gamma_w (\alpha + n\beta) M s = \mu_e s.$$

其中: μ_e 是所熟知的承压含水层弹性给水度.

现在排除这一假定, 根据(1)式, 有:

$$\Delta \sigma' = \Delta \sigma - \Delta p,$$

$$\Delta V' = \mu_e s + \alpha M \Delta \sigma.$$

$\Delta V'$ 是考虑总应力变化时的释水量. 抽水过程中, 因为顶板弯曲产生支撑力, 导致传递到含水层的总应力减小, $\Delta \sigma < 0$, 因此 $\Delta V' < \Delta V$. 这说明, 顶板弯曲使含水层不能提供象传统模型那样多的释水量, 因而在抽水井作用下应有更大的降深.

本文之目的就是 对 Theis 的承压含水层一井孔模型作出改进, 在其中考虑顶板弯曲的作用, 并比较两者的不同之处.

1 模型及其解析解

改进的模型中要刻画含水层顶板的弯曲, 作为第一步措施, 假定无限大承压含水层的顶板为弹性薄板, 用弹性薄板挠曲模型描述顶板弯曲. 为了获得比较简明的数学结果, 进一步假定水是不可压缩的. 忽略作为顶板的地层的塑性、流变、较大厚度和含水层中水的压缩性等性质, 可以避免复杂的数学关系, 这种简化不会影响顶板弯曲作用的存在性, 同时又可以得到简洁明了的理论结果.

设含水层底板物质变形为零, 则含水层的压缩量与顶板的挠度(向下的垂直位移) w 是一致的, 即:

$$w = \alpha M \Delta \sigma'.$$

忽略水的压缩性, 则 $\mu_e = \gamma_w \alpha M$, 而(3)式可改写为:

$$\Delta V = w = \mu_e \Delta \sigma' / \gamma_w. \tag{4}$$

根据(2), (4)还可以把(1)式改写为:

$$\Delta \sigma = \gamma_w w / \mu_e - \gamma_w s. \tag{5}$$

把(4)式与含水层中地下水的非稳定运动^[5]相结合,

可以得到径向流条件下的渗流方程:

$$T \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} + q(r, t). \tag{6}$$

T 为含水层的导水系数, $q(r, t)$ 是源汇项(补给含水层为正). (5)式所表示的总应力变化是导致顶板发生挠曲的垂向附加荷载, 假定顶板的变形符合小挠度薄板理论, 则得到顶板的挠曲方程^[6]为:

$$D \nabla^4 w = -\Delta \sigma = -\frac{\gamma_w}{\mu_e} w + \gamma_w s. \tag{7}$$

其中 D 为顶板的挠曲刚度:

$$D = \frac{E d^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

E 是顶板的变形模量, d 为顶板的厚度, ν 为泊松比. 可见, 顶板的弯曲刚度随其地层的增厚迅速增大, 随其地层的压缩性增强(变形模量减小)而降低.

结合适当的边界条件和初始条件, 并利用下列常量:

$$a = \frac{T}{\mu_e}, b = \frac{TD}{\gamma_w}$$

可以把数学模型描述为:

$$b \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) w + a w = T s, \tag{8a}$$

$t > 0, r > 0;$

$$T \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} + q(r, t), \tag{8b}$$

$t > 0, r > 0;$

$$\lim_{r_w \rightarrow 0} \int_0^{r_w} 2\pi r q(r, t) dr = -Q(\text{const}), r \leq r_w; \tag{8c}$$

$q(r, t) = 0, r > r_w, t > 0;$

$$s(\infty, t) = 0, w(\infty, t) = 0, t > 0; \tag{8d}$$

$$s(r, 0) = 0, w(r, 0) = 0, 0 < r < \infty. \tag{8e}$$

其中: r 为井心距, t 为时间, r_w 为抽水井半径, Q 为井的出水流量. 从(8a)可以看出, 顶板的变形与 Winkler 弹性地基上无限大薄板的挠曲^[7]是一致的. 此外, a 就是承压含水层压力传导系数(其涵义类似于热传导扩散系数^[8]), b 可以称为顶板挠曲传导系数.

利用 Hankel 变换, 记:

$$\bar{s} = \int_0^\infty r s J_0(\beta r) dr,$$

$$\bar{w} = \int_0^\infty r w J_0(\beta r) dr.$$

分别为 s, w 的 Hankel 变换, $J_0(x)$ 为第一类零阶 Bessel 函数. 这样可以把上述数学模型转化为下面的方程组:

$$\begin{cases} b\beta^4 \bar{w} + a\bar{w} = T\bar{s}, \\ \frac{Q}{2\pi} - T\beta^2 \bar{s} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}. \end{cases} \quad (9a)$$

$$\quad (9b)$$

由(9a)可得到:

$$T\bar{s} = (a + b\beta^4) \bar{w},$$

代入(9b)并结合初始条件解得:

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{Q}{2\pi} \int_0^t e^{-(a\beta^2 + b\beta^6)(t-\tau)} d\tau, \\ \bar{s} = \frac{Q}{2\pi T} \int_0^t (a + b\beta^4) e^{-(a\beta^2 + b\beta^6)(t-\tau)} d\tau. \end{cases}$$

积分上式有:

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1 - e^{-(a\beta^2 + b\beta^6)t}}{a\beta^2 + b\beta^6}, \\ \bar{s} = \frac{Q}{2\pi T} \frac{1 - e^{-(a\beta^2 + b\beta^6)t}}{\beta^2}. \end{cases}$$

利用 Hankel 逆变换,得到 s, τ 的表达式:

$$\begin{cases} w = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(a\beta^2 + b\beta^6)\tau}}{a\beta^2 + b\beta^6} \beta J_0(\beta r) d\beta, \\ s = \frac{Q}{2\pi T} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(a\beta^2 + b\beta^6)\tau}}{\beta^2} \beta J_0(\beta r) d\beta. \end{cases}$$

利用以下变量:

$$U = 4at/r^2, V = 36bt/r^6, x = (\beta r)^2.$$

可以将上式转化为:

$$\begin{cases} w = \frac{Q}{4\pi r^2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(Ux + Vx^3)/36}}{U \frac{x}{4} + V \frac{x^3}{36}} J_0(\sqrt{x}) dx, \\ s = \frac{Q}{4\pi T} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(Ux + Vx^3)/36}}{x} J_0(\sqrt{x}) dx. \end{cases}$$

其中: U, V 为无量纲数. 不妨用以下函数记号对积分进行简化:

$$\begin{cases} N(U, V) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(9Ux + Vx^3)/36}}{(9Ux + Vx^3)/36} J_0(\sqrt{x}) dx, \\ M(U, V) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(9Ux + Vx^3)/36}}{x} J_0(\sqrt{x}) dx. \end{cases}$$

则:

$$w = \frac{Q}{4\pi r^2} N(U, V) = \frac{Q}{4\pi r^2} N\left(\frac{4at}{r^2}, \frac{36bt}{r^6}\right), \quad (10a)$$

$$s = \frac{Q}{4\pi T} M(U, V) = \frac{Q}{4\pi T} M\left(\frac{4at}{r^2}, \frac{36bt}{r^6}\right). \quad (10b)$$

当含水层顶板刚度为零时, $D=0, V=0$, 则:

$$M(U, 0) = W(u) = \int_u^\infty e^{-y}/y dy, \quad (11a)$$

$$N(U, 0) = 4M(U, 0)/U = W(u)r^2/at. \quad (11b)$$

其中: $W(u)$ 为 Theis 井函数, $u = r^2/4at$, 这样模型将退化为 Theis 井流模型.

2 改进模型与 Theis 模型的解析解对比

式(10)就是本处考虑顶板挠曲的改进 Theis 井流模型的解析解. 利用数值积分法可以得到无因次地下水水头降深 $s_D [= s/(Q/4\pi t)]$ 与无因次时间 $t_D [= 1/u = 4at/r^2]$ 的关系曲线(图 2). 由图可见, Theis 模型解析解的结果是偏低的, 偏离程度随着顶板挠曲传导系数 b 的增大而增大, 但当 $t_D > 20$ 时两种模型的结果十分接近. 如果顶板没有刚度, $b=0, V=0$, 则曲线就是 Theis 降深曲线.

由于 V 与无因次时间相关, 特从 V 中提取出无因次径距 $r_D [= ar^4/(9b)]$, 使得 $V = t_D/r_D$. r_D 对无因次降深的影响见图 3. 从图 3 可以看出, $r_D \rightarrow \infty$ 时, 其结果与 Theis 模型相同. 从曲线的发展看, 改进模型与 Theis 模型的差别不仅有随时间增大而缩小的趋势, 且随着与抽水井距离的增大而迅速缩小.

3 结语

通过对承压含水层受力和顶板变形的重新思

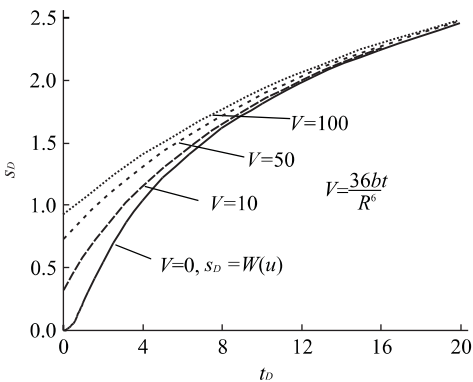


图 2 改进的 Theis 井流模型的无因次降深曲线

Fig. 2 Dimensionless drawdown s_D against the dimensionless time t_D

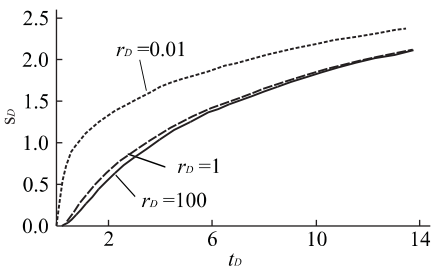


图 3 无因次径距 r_D 对 $s_D - t_D$ 曲线的影响

Fig. 3 Effect of dimensionless distance r_D to $s_D - t_D$ curves

考,传统地下水井流理论是可以加以改进的,一个主要的结论就是顶板弯曲会导致更大的抽水降深.通过引入弹性薄板理论对 Theis 井流模型进行改进,得到的解析解从理论上证实了 Theis 模型预测的水头降深偏低,因而计算的地下水水位偏高,这种偏差总体上随着时间和与抽水井距离的增大而减小.改进 Theis 井流模型与原模型的本质区别,在于不再假定传递到含水层的总应力在抽水过程中是守恒的.虽然这仍然是一个高度简化的模型,但揭示了一些基本的变化.考虑含水层顶板的弯曲作用有利于进一步认识地下水、油气开采对浅表地层应力重分布和变形的影响,值得深入探讨.

参考文献:

[1] Theis C V. The relation between lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground water storage [J]. Trans Amer Geophys Union, 1935, 16: 519—524.

[2] Jacob C E. 论弹性承压含水层中的水流[A]. 见: 张宏仁. 地下水水力学的发展[C]. 北京:地质出版社,1992. 58—70.

Jacob C E. The flow of water in an elastic artesian aquifer [A]. In: ZHANG H R, ed. Development of groundwater hydraulics [C]. Beijing: Geological Publishing House,1992. 58—70.

[3] 陈崇希,吴修义. 边界附近地下水不稳定井流试验数据的分析法[A]. 见:综合治理和利用矿床大面积地下水经

验汇编[C]. 北京:煤炭工业出版社,1979. 22—41.

CHEN C X, WU X Y. Analytical methods of transient well-flow test data close by boundary [A]. In: The experiences of harnessing and utilizing of mine groundwater in large areas [C]. Beijing: Coal Industry Press, 1979, 22—41.

[4] Bear J. Dynamics of fluids in porous media [M]. New York: Elsevier Publishing Co,1972. 54—55.

[5] 张蔚榛. 地下水非稳定流计算和地下水资源评价[M]. 北京:科学出版社,1983. 12—17.

ZHANG W Z. Calculating on transient seepage and evaluating on water resources [M]. Beijing: Sci Press, 1983. 12—17.

[6] 曲庆璋,章权,季求知,等. 弹性板理论[M]. 北京:人民交通出版社,2000. 27—30.

QU Q Z, ZHANG Q, JI Q Z, et al. The theory of elastic plates [M]. Beijing: Public Communicational Publishing House, 2000. 27—30.

[7] Selvadural A P S[加]. 土与基础相互作用的弹性分析[M]. 范文田,何广汉,张式深,等译. 北京:中国铁道出版社,1984. 132—139.

Selvadural A P S (Canada). Analysis of the actions between earth and foundation[M]. Beijing: China Railways Press, 1984. 132—139.

[8] 陈崇希,林敏. 地下水动力学[M]. 武汉:中国地质大学出版社,1998. 28.

CHEN C X, LIN M. Hydraulics of ground water [M]. Wuhan: China Univ of Geosci Press, 1998. 28.

Analysis of Modified Theis Model on Well Flow:
Considering Bending of the Confining Stratum

WNAG Xu-sheng, CHEN Chong-xi

(Institute of Environmental Geoscience, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: Theis model is the basic classic theory of pumping groundwater flow in confined aquifers, which neglects the bending effects of confining stratum on the aquifer water releasing. A new model is introduced in this paper with the theory of elastic plates to modify Theis model. The analysis of the new model is proved that drawdown evaluated by Theis model is low, which also was shown in the pumping test.

Key words: groundwater; Theis model; bending.