

# 离散介质中地震波传播的本构问题

於文辉<sup>1</sup>, 张丽琴<sup>1</sup>, 王家映<sup>1</sup>, 周玉琦<sup>2</sup>

(1. 中国地质大学地球物理系, 湖北武汉 430074; 2. 中国新星石油公司, 北京 100083)

**摘要:** 实际地球介质是相当复杂的. 基于均匀的、连续介质模型建立的弹性波动理论可能导致对地球结构地震响应的不当解释, 有时可能是错误解释. 由于没有更接近实际地球介质模型的波动理论, 许多有用的地震信息因得不到合理解释, 被作为噪音处理了. 从等效介质角度来看, 储层介质可以划分为弹性区、粘性区、空白区(空白区是由孔隙、裂隙、结构面产生的介质性质弱化区)组成的离散介质. 在局部平均思想的指导下, 利用区间内聚定理建立起离散(储层)介质的本构关系, 为建立更接近实际地球介质模型的波动理论提供了力学基础.

**关键词:** 地球介质; 连续介质; 离散介质; 弹性波; 本构关系.

中图分类号: P631.4 文献标识码: A

文章编号: 1000-2383(2003)03-0315-08

**作者简介:** 於文辉(1957—), 男, 高级工程师, 从事多组分复合不均匀介质中地震波传播理论研究. E-mail: wenhuiy@hotmail.com

线弹性介质模型解决了大量的理论与工程实际问题, 随着应用要求的不断深化与发展, 人们相继提出孔隙介质、各向异性介质、双相介质、粘弹性介质等力学模型<sup>[1~5]</sup>. 由于对石油等资源的需求, 促进了对实际地壳介质力学状态的研究, 使得孔隙弹性介质、各向异性弹性介质等力学模型已得到初步的应用<sup>[6~14]</sup>. 尽管线弹性观点及其演化理论得到广泛的应用, 但它对地球介质的认识是一级近似. 随着人类科学技术的发展, 观测精度的提高, 实际地震资料的动力学特征与现有波动方程计算结果之间的差异将更加明显. 常规地震理论解释结果与使用实际钻井结果常常存在一定误差, 说明使用基于连续介质的线弹性理论描述地球介质与使用实际介质模型存在差距. 天然岩石由矿物颗粒、孔隙、孔隙流体、孔隙充填物(泥质或长石等)所构成, 且各种形式的结构面(如节理、层理、裂隙等)贯穿天然岩石, 所以, 天然岩石属离散介质的范畴. 流变力学研究表明, 任何介质皆具有弹性与粘性双重特性<sup>[15]</sup>. 因此, 从流变学的角度, 建立多维离散介质力学模型, 能够更接近实际地壳介质的力学状态, 致使对地震波的传播模拟能够建立在更接近地球介质的力学描述基础上. 沉积

岩约占地壳岩石的5%, 却是人类赖以生存的主要介质, 所以, 本文主要讨论沉积岩的离散特征.

## 1 砂与砂岩地层的力学属性

砂与砂岩地层属多孔介质, 多孔介质的结构特征是<sup>[16]</sup>: (1) 多孔介质由固体和孔洞组成, 固体是孔洞的骨架; (2) 孔洞之间相互连通或部分连通; (3) 孔洞的形状多种多样, 非常复杂; (4) 在一定的条件下, 孔洞中的流体可以流动.

多孔介质分为单孔介质和双孔介质(图1). 若不考虑层理、裂隙对砂岩的切割作用, 砂岩属于单孔隙介质; 若总体考虑节理、层理、裂隙对砂岩的切割作用, 砂岩地层属于双孔隙介质. 若将碳酸盐岩的孔、洞、缝看作一级孔隙, 原始孔隙看作二级孔隙, 则碳酸盐岩属双孔隙介质. 砂岩的固体颗粒以石英为主要成分(占60%以上)<sup>[17]</sup>, 其他为长石、云母等. 固体颗粒之间以硅质或钙质相胶结. 砂岩地层中的孔隙空间主要由流体、泥质等所充填, 因此, 砂岩地层属含流体多孔介质(图1). 对碳酸盐岩来说, 主要是孔、洞、缝体系与它们的不均匀分布及孔、洞、缝中的流体对地球物理场的影响较大, 也是人们感兴趣的对象; 原生孔隙及孔隙中的流体对地球物理场的影响甚小, 可略去不计; 前者属于不均匀介质的范畴.

收稿日期: 2002-10-08

基金项目: 石油天然气总公司物探重点实验室项目(GPKL0202); 湖北省自然科学基金项目(No. 2002AB018).

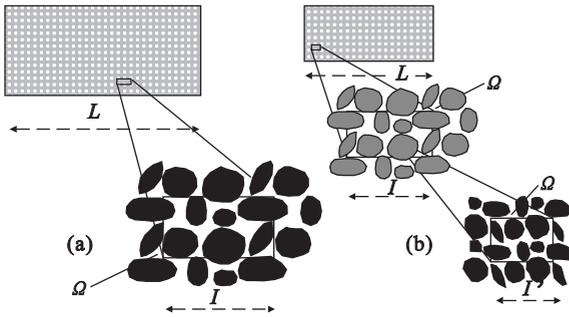
图 1 多孔介质模型<sup>[18]</sup>

Fig. 1 Single-porous medium (a) and double-porous medium models (b)

a. 单孔隙介质; b. 双孔隙介质

在地球科学中,人们以连续介质力学为手段,对地球物质进行了一级近似的深入研究.表现在砂岩地层特性方面<sup>[16]</sup>:(1)储容性.砂岩储集层的孔隙空间能够储集和容纳流体;(2)可流动(渗透)性.储集层岩石的孔隙空间大部分是相互连通的,孔隙流体能在孔隙中流动;(3)润湿性.岩石孔隙的表面与流体接触时相互间的亲和性,由于孔隙表面矿物质的不同,这种亲和性也有显著的差异,润湿性影响孔隙流体在孔隙空间的分布,对孔隙流体运动规律有重要影响;(4)各向异性.由于岩石的沉积形成过程有一定的方向性,使得这种多孔介质的许多特性具有各向异性,尤其在水平方向和垂直方向上,差异一般都非常显著;(5)非均质性.岩石的形成和沉积过程受多种因数的影响,使这种多孔介质的性质在平面上和纵向上变化范围大,有时相差几个数量级.

图 1,2 表明,砂岩地层属多相介质.多相介质属于离散介质的范畴,只不过其中应力和应变的分布是非均匀的.最简单的多相介质是弹性与粘性的二相介质,其次是多孔介质.比较复杂的离散介质包括固—固相、气—固相、液—固相、气—液相、液—液相及气—液—固相等.

上述分析说明含流体多孔介质属于离散介质的范畴.离散介质受外力作用时,同时具有变形与流动 2 种效应,因此我们必须以流变力学为工具,研究离散介质.

## 2 离散介质本构关系

离散介质就是密度不能处处连续,Hook 定律不能处处成立的介质.孔隙介质中,Hook 定律在颗

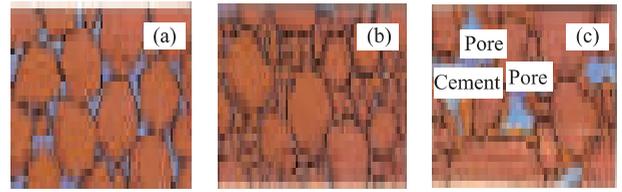


图 2 砂岩结构示意图

Fig. 2 Structure sketch map showing unconsolidated uniform sand (a), unconsolidated non-uniform sand (b) and consolidated sandstone (c)

a. 未固结均匀砂层; b. 未固结不均匀砂层; c. 未固结砂岩

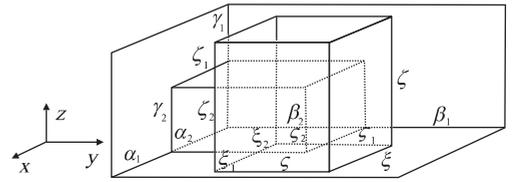


图 3 三维离散介质力学模型示意图

Fig. 3 Sketch map of three dimensions discrete medium mechanics model

粒接触边界处不能成立;裂隙介质中,Hook 定律在裂缝边界处不能成立.假定  $l$  是孔隙介质具有几乎相同物性的最小尺度,且  $1/l \ll 1$ ,按照流变学观点,可以将储层介质等效为由弹性区、粘性区、空白区组成的离散介质(图 3),空白区是由孔隙、裂隙、结构面产生的介质性质弱化区.各区的分布以其自身的相对特征长度表示.这些相对特征长度是  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \xi, \epsilon, \zeta, \xi_1, \xi_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \zeta_1, \zeta_2$ ;其中  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  表示弹性区的相对特征长度,  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  表示粘性区的相对特征长度,  $\xi, \epsilon, \zeta$  表示空白区相对特征长度,  $\xi_1, \epsilon_1, \zeta_1; \xi_2, \epsilon_2, \zeta_2$  分别表示空白区在弹性区与粘性区的相对特征长度.这些参数都是单元体介质力学性质的相对度量.例如  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  表示单元体内粘性力学性质对图 3 所示单元体介质力学性质的影响程度.空白区相对特征长度是通过弱化效应影响单元体介质力学性质.如果  $\xi_2, \epsilon_2, \zeta_2$  皆等于零,则图 3 反映液体与固体结合的离散介质模型(对应油藏模型);如果  $\xi_2, \epsilon_2, \zeta_2$  不等于零,则图 3 反映气体、液体与固体结合的离散介质模型(对应气藏模型).

如果砂岩孔隙未被流体充填,则可以用孔隙介质描述,图 3 的粘性区反映固体介质的粘性性质;如果砂岩孔隙被流体充填,图 3 的粘性区反映多相介质的粘性性质.本文主要讨论孔隙介质的本构问题.

如图 3 所示,弹性区应力分量  $\tau_{xH}, \tau_{yH}, \tau_{zH}$  和粘性

区应力分量  $\tau_{xN}, \tau_{yN}, \tau_{zN}$ , 按照下式组成合应力分量:

$$\begin{aligned} \tau_x &= (1 - \beta_2 \gamma_2) \tau_{xH} + \beta_2 \gamma_2 \tau_{xN}, \\ \tau_y &= (1 - \alpha_2 \gamma_2) \tau_{yH} + \alpha_2 \gamma_2 \tau_{yN}, \\ \tau_z &= (1 - \alpha_2 \beta_2) \tau_{zH} + \alpha_2 \beta_2 \tau_{zN}. \end{aligned} \quad (1)$$

弹性区应变  $e_{xH}, e_{yH}, e_{zH}$  和粘性区应变  $e_{xN}, e_{yN}, e_{zN}$  按照下式组成合应变分量:

$$\begin{aligned} e_x &= \alpha_1 e_{xH} + \alpha_2 e_{xN}, \\ e_y &= \beta_1 e_{yH} + \beta_2 e_{yN}, \\ e_z &= \gamma_1 e_{zH} + \gamma_2 e_{zN}. \end{aligned} \quad (2)$$

弹性区的变形服从广义 Hook 定律:

$$\begin{aligned} e_x &= a_{11} \tau_x + a_{12} \tau_y + a_{13} \tau_z, \\ e_y &= a_{21} \tau_x + a_{22} \tau_y + a_{23} \tau_z, \\ e_z &= a_{31} \tau_x + a_{32} \tau_y + a_{33} \tau_z, \\ e_{yx} &= a_{44} \tau_{yx}, e_{xz} = a_{55} \tau_{xz}, e_{xy} = a_{66} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $(a_{ij}) = (c_{ij})^{-1}$ ,  $(c_{ij})$  是介质劲度模量. 粘性区的变形服从广义 Newton 定律:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= b_{11} \tau_x + b_{12} \tau_y + b_{13} \tau_z, \\ \dot{e}_y &= b_{21} \tau_x + b_{22} \tau_y + b_{23} \tau_z, \\ \dot{e}_z &= b_{31} \tau_x + b_{32} \tau_y + b_{33} \tau_z, \\ \dot{e}_{yx} &= b_{44} \tau_{yx}, \dot{e}_{xz} = b_{55} \tau_{xz}, \\ \dot{e}_{xy} &= b_{66} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $(b_{ij}) = (\eta_{ij}^{-1})$ ,  $\eta_{ij}$  是介质的粘性系数. 所以弹性区的应变可写成:

$$\begin{aligned} e_{xH} &= a_{11} \tau_x + a_{12} (\beta_1 \tau_y + \beta_2 \tau_{yH}) + a_{13} (\gamma_1 \tau_z + \gamma_2 \tau_{zH}), \\ e_{yH} &= a_{21} (\alpha_1 \tau_x + \alpha_2 \tau_{xH}) + a_{22} \tau_y + a_{23} (\gamma_1 \tau_z + \gamma_2 \tau_{zH}), \\ e_{zH} &= a_{31} (\alpha_1 \tau_x + \alpha_2 \tau_{xH}) + a_{32} (\alpha_1 \tau_x + \alpha_2 \tau_{xH}) + a_{33} \tau_z. \end{aligned} \quad (5)$$

由区间内聚定理知<sup>[15]</sup>:

$$\begin{aligned} e_{xH} &= a_{11} R_{\alpha_1} \tau_x + a_{12} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \beta_2 \tau_{yH}) + a_{13} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \gamma_2 \tau_{zH}), \\ e_{yH} &= a_{21} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \tau_{xH}) + a_{22} R_{\beta_1} \tau_y + a_{23} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \gamma_2 \tau_{zH}), \\ e_{zH} &= a_{31} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \tau_{xH}) + a_{32} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \beta_2 \tau_{yH}) + a_{33} R_{\gamma_1} \tau_z, \\ e_{xN} &= a_{11} R_{\alpha_2} \tau_{xH} + a_{12} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \beta_2 \gamma_1 \tau_{yH}) + a_{13} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \beta_1 \gamma_2 \tau_{zH}) = \int_{t_0}^t (S_{\alpha_2} b_{11} \tau_{xH} + S_{\beta_2} b_{12} \tau_{yN} + S_{\gamma_2} b_{13} \tau_{zN}) dt', \\ e_{yN} &= a_{21} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \gamma_1 \tau_{xH}) + a_{22} R_{\beta_2} \tau_{yH} + a_{23} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \alpha_1 \gamma_2 \tau_{zH}) = \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^t (S_{\alpha_2} b_{21} \tau_{xH} + S_{\beta_2} b_{22} \tau_{yN} + S_{\gamma_2} b_{23} \tau_{zN}) dt', \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e_{zN} &= a_{31} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \beta_1 \tau_{xH}) + a_{32} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \alpha_1 \beta_2 \tau_{yH}) + a_{33} R_{\gamma_2} \tau_{zH} = \int_{t_0}^t (S_{\alpha_2} b_{31} \tau_{xN} + S_{\beta_2} b_{32} \tau_{yN} + S_{\gamma_2} b_{33} \tau_{zH}) dt'. \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1} &= \frac{1}{\alpha_1} \left[ \alpha_1 - \xi_1 + \frac{\xi_1}{(1 - \epsilon)(1 - \zeta)} \right], \\ R_{\beta_1} &= \frac{1}{\beta_1} \left[ \beta_1 - \epsilon_1 + \frac{\epsilon_1}{(1 - \xi)(1 - \zeta)} \right], \\ R_{\gamma_1} &= \frac{1}{\gamma_1} \left[ \gamma_1 - \zeta_1 + \frac{\zeta_1}{(1 - \xi)(1 - \epsilon)} \right], \\ R_{\alpha_2} &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_2 - \xi_2 + \frac{\xi_2}{(\beta_1 - \epsilon_1)(\gamma_1 - \zeta_1)} \right], \\ R_{\beta_2} &= \frac{1}{\beta_2} \left[ \beta_2 - \epsilon_2 + \frac{\epsilon_2}{(\alpha_1 - \xi_1)(\gamma_1 - \zeta_1)} \right], \\ R_{\gamma_2} &= \frac{1}{\gamma_2} \left[ \gamma_2 - \zeta_2 + \frac{\zeta_2}{(\alpha_1 - \xi_1)(\beta_1 - \epsilon_1)} \right], \\ S_{\alpha_2} &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_2 - \xi_2 + \frac{\xi_2}{(\beta_2 - \epsilon_2)(\gamma_2 - \zeta_2)} \right], \\ S_{\beta_2} &= \frac{1}{\beta_2} \left[ \beta_2 - \epsilon_2 + \frac{\epsilon_2}{(\alpha_2 - \xi_2)(\gamma_2 - \zeta_2)} \right], \\ S_{\gamma_2} &= \frac{1}{\gamma_2} \left[ \gamma_2 - \zeta_2 + \frac{\zeta_2}{(\alpha_2 - \xi_2)(\beta_2 - \epsilon_2)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

为单元体相对弱化效应函数,  $R_{\alpha_1}, R_{\beta_1}, R_{\gamma_1}$  是弹性区相对弱化效应,  $S_{\alpha_1}, S_{\beta_1}, S_{\gamma_1}$  是粘性区相对弱化效应,  $R_{\alpha_2}, R_{\beta_2}, R_{\gamma_2}$  是粘性区对弹性区的相对弱化效应. 图 3 表明本文的讨论对象为等效介质, 所以, 单元体划分是一种力学划分, 空间度量皆标以相对特征长度, 相对特征长度的导出量也冠以“相对”二字, 为简化起见, 在后续讨论中, 本文皆略去“相对”二字.

将(1)式改写成粘性应力分量  $\tau_{xN}, \tau_{yN}, \tau_{zN}$  的表达式并代入(7)式, 微分并整理, 得:

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{S_{\alpha_2} b_{11} (1 - \beta_2 \gamma_2)}{\beta_2 \gamma_2} + \alpha_{11} R_{\alpha_2} \frac{d}{dt} \right] \tau_{xH} + \left[ \frac{S_{\beta_2} b_{12} (1 - \alpha_2 \gamma_2)}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_2} \beta_2 \gamma_2 a_{12} \frac{d}{dt} \right] \tau_{yH} + \left[ \frac{S_{\gamma_2} b_{13} (1 - \alpha_2 \beta_2)}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_2} \beta_1 \gamma_2 a_{13} \frac{d}{dt} \right] \tau_{zH} = \frac{S_{\alpha_2} b_{11}}{\beta_2 \gamma_2} \sigma_x + \left( \frac{S_{\beta_2} b_{12}}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_1} \beta_1 a_{12} \frac{d}{dt} \right) \tau_y + \left( \frac{S_{\gamma_2} b_{13}}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_1} \gamma_1 a_{13} \frac{d}{dt} \right) \tau_z \cdot \left[ \frac{S_{\alpha_2} b_{21} (1 - \beta_2 \gamma_2)}{\beta_2 \gamma_2} + R_{\alpha_2} \alpha_2 \gamma_1 a_{21} \frac{d}{dt} \right] \tau_{xH} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{S_{\beta_2} b_{22} (1 - \alpha_2 \gamma_2)}{\alpha_2 \gamma_2} + a_{22} R_{\beta_2} \frac{d}{dt} \right] \tau_{yH} + \\ & \left[ \frac{S_{\gamma_2} b_{23} (1 - \alpha_2 \beta_2)}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_2} \alpha_1 \gamma_2 a_{23} \frac{d}{dt} \right] \tau_{zH} = \\ & \left( \frac{S_{\alpha_2} b_{21}}{\beta_2 \gamma_2} + R_{\alpha_1} \alpha_1 a_{21} \frac{d}{dt} \right) \tau_x + \frac{S_{\beta_2} b_{22}}{\alpha_2 \gamma_2} \tau_y + \\ & \left( \frac{S_{\gamma_2} b_{23}}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_1} \gamma_1 a_{23} \frac{d}{dt} \right) \tau_z \left[ \frac{S_{\alpha_2} b_{31} (1 - \beta_2 \gamma_2)}{\beta_2 \gamma_2} + \right. \\ & \left. R_{\alpha_2} \alpha_2 \beta_1 a_{31} \frac{d}{dt} \right] \tau_{xH} + \\ & \left[ \frac{S_{\beta_2} b_{32} (1 - \alpha_2 \gamma_2)}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_2} \alpha_1 \beta_2 a_{32} \frac{d}{dt} \right] \tau_{yH} + \\ & \left[ \frac{S_{\gamma_2} b_{33} (1 - \alpha_2 \beta_2)}{\alpha_2 \beta_2} + a_{33} R_{\gamma_2} \frac{d}{dt} \right] \tau_{zH} = \\ & \left( \frac{S_{\alpha_2} b_{31}}{\beta_2 \gamma_2} + R_{\alpha_1} \alpha_1 a_{31} \frac{d}{dt} \right) \tau_x + \left( \frac{S_{\beta_2} b_{32}}{\alpha_2 \gamma_2} + \right. \\ & \left. R_{\beta_1} \beta_1 a_{32} \frac{d}{dt} \right) \tau_y + \frac{S_{\gamma_2} b_{33}}{\alpha_2 \beta_2} \tau_z. \end{aligned}$$

令:

$$\begin{aligned} & \frac{S_{\alpha_2} b_{11} (1 - \beta_2 \gamma_2)}{\beta_2 \gamma_2} + a_{11} R_{\alpha_2} \frac{d}{dt} = m_{11} + n_{11} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\beta_2} b_{12} (1 - \alpha_2 \gamma_2)}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_2} \beta_2 \gamma_1 a_{12} \frac{d}{dt} = m_{12} + n_{12} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\gamma_2} b_{13} (1 - \alpha_2 \beta_2)}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_2} \beta_1 \gamma_2 a_{13} \frac{d}{dt} = m_{13} + n_{13} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\alpha_2} b_{21} (1 - \beta_2 \gamma_2)}{\beta_2 \gamma_2} + R_{\alpha_2} \alpha_2 \gamma_1 a_{21} \frac{d}{dt} = m_{21} + n_{21} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\beta_2} b_{22} (1 - \alpha_2 \gamma_2)}{\alpha_2 \gamma_2} + a_{22} R_{\beta_2} \frac{d}{dt} = m_{22} + n_{22} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\gamma_2} b_{23} (1 - \alpha_2 \beta_2)}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_2} \alpha_1 \gamma_2 a_{23} \frac{d}{dt} = m_{23} + n_{23} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\alpha_2} b_{31} (1 - \beta_2 \gamma_2)}{\beta_2 \gamma_2} + R_{\alpha_2} \alpha_2 \beta_1 a_{31} \frac{d}{dt} = m_{31} + n_{31} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\beta_2} b_{32} (1 - \alpha_2 \gamma_2)}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_2} \alpha_1 \beta_2 a_{32} \frac{d}{dt} = m_{32} + n_{32} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\gamma_2} b_{33} (1 - \alpha_2 \beta_2)}{\alpha_2 \beta_2} + a_{33} R_{\gamma_2} \frac{d}{dt} = m_{33} + n_{33} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\alpha_2} b_{11}}{\beta_2 \gamma_2} = m_{14}, \frac{S_{\beta_2} b_{12}}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_1} \beta_1 a_{12} \frac{d}{dt} = m_{15} + n_{15} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\gamma_2} b_{13}}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_1} \gamma_1 a_{13} \frac{d}{dt} = m_{16} + n_{16} \frac{d}{dt} \frac{S_{\alpha_2} b_{21}}{\beta_2 \gamma_2} + \\ & R_{\alpha_1} \alpha_1 a_{21} \frac{d}{dt} = m_{24} + n_{24} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\beta_2} b_{22}}{\alpha_2 \gamma_2} = m_{25}, \frac{S_{\gamma_2} b_{23}}{\alpha_2 \beta_2} + R_{\gamma_1} \gamma_1 a_{23} \frac{d}{dt} = m_{26} + n_{26} \frac{d}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{S_{\alpha_2} b_{31}}{\beta_2 \gamma_2} + R_{\alpha_1} \alpha_1 a_{31} \frac{d}{dt} = m_{34} + n_{34} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\beta_2} b_{32}}{\alpha_2 \gamma_2} + R_{\beta_1} \beta_1 a_{32} \frac{d}{dt} = m_{35} + n_{35} \frac{d}{dt}, \\ & \frac{S_{\gamma_2} b_{33}}{\alpha_2 \beta_2} = m_{36}. \end{aligned} \quad (9)$$

在上面的简记中,  $m_{ij}$  中的  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ , 与时间算子无关, 是时间微分算子的系数, 且  $n_{14} = n_{25} = n_{36} = 0$ . 因此, (9) 式可简写为:

$$\begin{aligned} & (m_{11} + n_{11} \frac{d}{dt}) \tau_{xH} + (m_{12} + n_{12} \frac{d}{dt}) \tau_{yH} + \\ & (m_{13} + n_{13} \frac{d}{dt}) \tau_{zH} = m_{14} \tau_x + (m_{15} + n_{15} \frac{d}{dt}) \tau_y + \\ & (m_{16} + n_{16} \frac{d}{dt}) \tau_z; \\ & (m_{21} + n_{21} \frac{d}{dt}) \tau_{xH} + (m_{22} + n_{22} \frac{d}{dt}) \tau_{yH} + \\ & (m_{23} + n_{23} \frac{d}{dt}) \tau_{zH} = (m_{24} + n_{24} \frac{d}{dt}) \tau_x + \\ & m_{25} \tau_y + (m_{26} + n_{26} \frac{d}{dt}) \tau_z; \\ & (m_{31} + n_{31} \frac{d}{dt}) \tau_{xH} + (m_{32} + n_{32} \frac{d}{dt}) \tau_{yH} + \\ & (m_{33} + n_{33} \frac{d}{dt}) \tau_{zH} = (m_{34} + n_{34} \frac{d}{dt}) \tau_x + \\ & (m_{35} + n_{35} \frac{d}{dt}) \tau_y + m_{36} \tau_z. \end{aligned}$$

上式的矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} m_{11} + n_{11} \frac{d}{dt} & m_{12} + n_{12} \frac{d}{dt} & m_{13} + n_{13} \frac{d}{dt} \\ m_{21} + n_{21} \frac{d}{dt} & m_{22} + n_{22} \frac{d}{dt} & m_{23} + n_{23} \frac{d}{dt} \\ m_{31} + n_{31} \frac{d}{dt} & m_{32} + n_{32} \frac{d}{dt} & m_{33} + n_{33} \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xH} \\ \tau_{yH} \\ \tau_{zH} \end{pmatrix} = \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} m_{14} & m_{15} + n_{15} \frac{d}{dt} & m_{16} + n_{16} \frac{d}{dt} \\ m_{24} + n_{24} \frac{d}{dt} & m_{25} & m_{26} + n_{26} \frac{d}{dt} \\ m_{34} + n_{34} \frac{d}{dt} & m_{35} + n_{35} \frac{d}{dt} & m_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

该式反映弹性区法向应力与单元法向应力的关系. 上式关系中, 弹性区法向应力系数矩阵为:

$$\mathbf{A}_{xH} = \begin{pmatrix} m_{11} + n_{11} \frac{d}{dt} & m_{12} + n_{12} \frac{d}{dt} & m_{13} + n_{13} \frac{d}{dt} \\ m_{21} + n_{21} \frac{d}{dt} & m_{22} + n_{22} \frac{d}{dt} & m_{23} + n_{23} \frac{d}{dt} \\ m_{31} + n_{31} \frac{d}{dt} & m_{32} + n_{32} \frac{d}{dt} & m_{33} + n_{33} \frac{d}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{N}_1 \frac{d}{dt} \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} m_{14} & m_{15} + n_{15} \frac{d}{dt} & m_{16} + n_{16} \frac{d}{dt} \\ m_{24} + n_{24} \frac{d}{dt} & m_{25} & m_{26} + n_{26} \frac{d}{dt} \\ m_{34} + n_{34} \frac{d}{dt} & m_{35} + n_{35} \frac{d}{dt} & m_{36} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{34} & m_{35} & m_{36} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n_{15} & n_{16} \\ n_{24} & 0 & n_{26} \\ n_{34} & n_{35} & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{N}_2 \frac{d}{dt}. \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{S_{\alpha_2}(1-\beta_2\gamma_2)b_{11}}{\beta_2\gamma_2} & \frac{S_{\beta_2}(1-\alpha_2\gamma_2)b_{12}}{\alpha_2\gamma_2} & \frac{S_{\gamma_2}(1-\alpha_2\beta_2)b_{13}}{\alpha_2\beta_2} \\ \frac{S_{\alpha_2}(1-\beta_2\gamma_2)b_{21}}{\beta_2\gamma_2} & \frac{S_{\beta_2}(1-\alpha_2\gamma_2)b_{22}}{\alpha_2\gamma_2} & \frac{S_{\gamma_2}(1-\alpha_2\beta_2)b_{23}}{\alpha_2\beta_2} \\ \frac{S_{\alpha_2}(1-\beta_2\gamma_2)b_{31}}{\beta_2\gamma_2} & \frac{S_{\beta_2}(1-\alpha_2\gamma_2)b_{32}}{\alpha_2\gamma_2} & \frac{S_{\gamma_2}(1-\alpha_2\beta_2)b_{33}}{\alpha_2\beta_1 2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{34} & m_{35} & m_{36} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{S_{\alpha_2} b_{11}}{\beta_2\gamma_2} & \frac{S_{\beta_2} b_{12}}{\alpha_2\gamma_2} & \frac{S_{\gamma_2} b_{13}}{\alpha_2\beta_2} \\ \frac{S_{\alpha_2} b_{21}}{\beta_2\gamma_2} & \frac{S_{\beta_2} b_{22}}{\alpha_2\gamma_2} & \frac{S_{\gamma_2} b_{23}}{\alpha_2\beta_2} \\ \frac{S_{\alpha_2} b_{31}}{\beta_2\gamma_2} & \frac{S_{\beta_2} b_{32}}{\alpha_2\gamma_2} & \frac{S_{\gamma_2} b_{33}}{\alpha_2\beta_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} R_{\alpha_2} a_{11} & R_{\beta_2} \beta_2 \gamma_1 a_{12} & R_{\gamma_2} \beta_1 \gamma_2 a_{13} \\ R_{\alpha_2} \alpha_2 \gamma_1 a_{21} & R_{\beta_2} a_{22} & R_{\gamma_2} \alpha_1 \gamma_2 a_{23} \\ R_{\alpha_2} \alpha_2 \beta_1 a_{31} & R_{\beta_2} \alpha_1 \beta_2 a_{32} & R_{\gamma_2} a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & n_{15} & n_{16} \\ n_{24} & 0 & n_{26} \\ n_{34} & n_{35} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & R_{\beta_1} \beta_1 a_{12} & R_{\gamma_1} \gamma_1 a_{13} \\ R_{\alpha_1} \alpha_1 a_{21} & 0 & R_{\gamma_1} \gamma_1 a_{23} \\ R_{\alpha_1} \alpha_1 a_{31} & R_{\beta_1} \beta_1 a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

上述分析可见,  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$  与时间微分算子无关;  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  是时间微分算子的系数矩阵. 所以, 弹性区法向应力与单元法向应力的关系由两部分组成: 第 1 项与时间无关, 我们称为稳态场, 它仅与介质模量及弱化效应有关; 第 2 项是弹性区法向应力关于时间的变化率, 我们称为非稳态场. 其中  $\mathbf{M}_1$  为弹性区法向应力关于单元法向应力的稳态场模量矩阵, 由粘性区模量元素、弱化效应及弹性区特征面积与粘性区特征面积之比构成.  $\mathbf{M}_2$  为单元法向应力关于弹性区法向应力的稳态场模量矩阵,  $\mathbf{N}_1$  由粘性区的模量元素、弱化效应与粘性区特征面积之比构成. 由弹性区模量元素、粘性区孔隙响应及弹性区、粘性区的相对特征长度构成.  $\mathbf{N}_2$  由弹性区模量元素、相对特征长度及弱化效应构成.  $\mathbf{N}_2$  的一个重要特征是主对角元素等于零. 因此, 弹性区法向应力与单元法向应力之间的关系可以进一步简记为:

$$\mathbf{A}_{xH} \begin{pmatrix} \tau_{xH} \\ \tau_{yH} \\ \tau_{zH} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_x \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix}. \quad (13)$$

又因为单元法向应变与单元法向应力及弹性区法向应力的关系为:

$$\begin{aligned} e_x &= \alpha_1 a_{11} R_{\alpha_1} \tau_x + a_{12} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \beta_2 \tau_{yH}) + \\ &\quad a_{13} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \gamma_2 \tau_{zH}) + \\ &\quad \alpha_2 [a_{11} R_{\alpha_2} \tau_{xH} + a_{12} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \beta_2 \gamma_1 \tau_{yH}) + \\ &\quad a_{13} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \beta_1 \gamma_2 \tau_{zH})], \\ e_y &= \beta_1 [a_{21} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \tau_{xH}) + \alpha_{22} R_{\beta_1} \tau_y + \\ &\quad a_{23} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \gamma_2 \tau_{zH})] + \\ &\quad \beta_2 [a_{21} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \gamma_1 \tau_{xH}) + \alpha_{22} R_{\beta_2} \tau_{yH} + \\ &\quad a_{23} (R_{\gamma_1} \gamma_1 \tau_z + R_{\gamma_2} \alpha_1 \gamma_2 \tau_{zH})], \\ e_z &= \gamma_1 [a_{31} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \tau_{xH}) + \\ &\quad \alpha_{32} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \beta_2 \tau_{yH}) + a_{33} R_{\gamma_1} \tau_z] + \\ &\quad \gamma_2 [a_{31} (R_{\alpha_1} \alpha_1 \tau_x + R_{\alpha_2} \alpha_2 \beta_1 \tau_{xH}) + \\ &\quad \alpha_{32} (R_{\beta_1} \beta_1 \tau_y + R_{\beta_2} \alpha_1 \beta_2 \tau_{yH}) + a_{33} R_{\gamma_2} \tau_{zH}]. \end{aligned} \quad (14)$$

化简, 得:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{34} & p_{35} & p_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xH} \\ \tau_{yH} \\ \tau_{zH} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} + \mathbf{P}_2 \begin{pmatrix} \tau_{xH} \\ \tau_{yH} \\ \tau_{zH} \end{pmatrix}. \quad (15)$$