

# 海潮引起的滨海地区包气带气压周期性变化的数值模拟

李海龙<sup>1,2</sup>, 焦赳赳<sup>2</sup>

(1. 鞍山师范学院数学计算机系, 辽宁鞍山 114005; 2. 香港大学地球科学系, 香港)

**摘要:** 滨海地区的地下水位由于海潮而上下波动, 这早已是为人熟知的事实。但是, 滨海地区包气带中气压也会随海潮的起伏而作周期性变化, 这一点却很少为人注意。如果地表由渗透性差的材料如水泥或沥青路面覆盖(这种情况在香港高度城市化的近海地区很常见), 海潮的起伏会产生幅度异常高的气压波动。在某些情形下, 足够高的气压会引起如路面拱起等工程问题。因此, 研究海潮引起的包气带气流, 不仅具有理论意义, 还对滨海地区土木工程有实际指导作用。以香港某滨海地区为例, 建立了该地区一剖面上水气两相流的二维数学模型, 并用 TOUGH2 程序进行了数值模拟。通过数值敏感度分析, 探讨了影响沥青路面下气压的主要水文地质因素。在根据该地区实际水文地质情况选取了适当的模型边界条件和模型参数后, 沥青路面下气压的数值模拟结果和观测数据吻合程度良好。

**关键词:** 水气两相流; TOUGH2 模拟程序; 海潮; 临海包气带; 气压波动。

中图分类号: P641.131 文献标识码: A

文章编号: 1000-2383(2003)05-0505-06

**作者简介:** 李海龙(1965—), 男, 博士, 教授, 主要从事地下水、气流数学模拟、生态数学及应用微分方程的研究工作。E-mail: hailong@graduate.hku.hk

在香港某滨海地区沥青路面下面已经观测到了显著的空气压力波动。过大的气压波动曾导致路面拱起变形破坏, 这种现象值得关注和研究。为了了解引起这种显著的压力波动的机理, 对该地区包气带中由海潮引起的水气两相流进行数值模拟研究是必要的。本文建立了该地区水气两相流的二维剖面数学模型, 并用 TOUGH2<sup>[1]</sup> 程序进行了数值模拟。在根据该地区实际水文地质情况选取了适当的模型边界条件和模型参数后, 对沥青路面下气压的数值模拟结果和观测数据进行了比较。

## 1 数学模型

由于缺乏观测数据, 不便对该区建立三维数值模型。然而该填海区海岸线是直线且长达数 km, 故包气带中的水气两相流可由剖面二维流近似。本文仅对该区的一个剖面建立二维数值模型。所考察的

包气带断面区域是一个长为 500 m、高为 7.35 m 的狭长矩形(图 1)。该区是由填海形成的, 断面内有 3 种填充材料, 作为路面的沥青混凝土、其下面和旁边的渗透性较差的海砂填充料 S, 以及其下的渗透性较好的细岩块填充料 R1。沥青混凝土厚度为 0.05~0.15 m; 填充料 S 的厚度在有沥青混凝土路的地方为 3.15 m, 在没有沥青混凝土路的地方裸露于地表, 其厚度为 3.30 m; 填充料 R1 厚度为 4.05 m。矩形的左边为海陆边界, 上边为地表, 右边是和填充

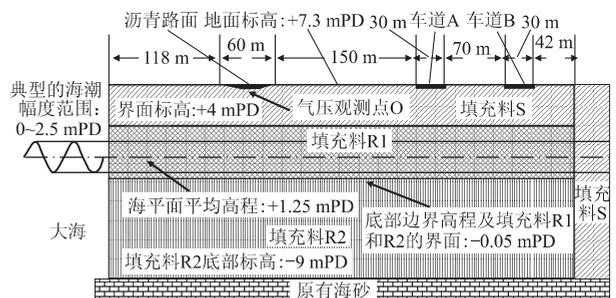


图 1 香港某海滨填海地区剖面结构

Fig. 1 Cross-section of a coastal reclamation area in Hong Kong

料 S 的交界面,下边是一个由粗岩块填充料 R2 形成的渗透性很好的水平含水层,填充料 R1 和 R2 的交界面形成了矩形的底部边界。

### 1.1 水气两相流的控制微分方程

描述水气两相流的数学模型建立在关于气、水分量的质量守恒定律的基础上。在恒温条件下,质量守恒方程可以表达成如下一般形式<sup>[1]</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{V_n} M^\kappa dV_n = \int_{\Gamma_n} \mathbf{F}^\kappa \cdot \mathbf{n} d\Gamma_n + \int_{V_n} q^\kappa dV_n. \quad (1)$$

式中积分区域  $V_n$  为所考察区域的任意一个子区域。该子区域以  $\Gamma_n$  为边界。左端项中的量  $M$  表示单位体积的质量,其上标对空气分量取  $\kappa = a$ ,对水分量取  $\kappa = w$ 。 $\mathbf{F}$  为质量通量,其详细定义将在下面给出。 $q$  为汇源项,用来模拟降雨入渗和随时间变化的 Dirichlet 型边界条件,其处理细节参见文献<sup>[1]</sup>。 $\mathbf{n}$  是面积元素  $d\Gamma_n$  的单位法向量,指向  $V_n$  内部。质量分量的一般表达方式

$$M^\kappa = \phi \sum_{\beta} S_{\beta} \rho_{\beta} X_{\beta}^{\kappa}, \quad (2)$$

即分量  $\kappa$  的总质量是流体中各相  $\beta$  (对液相  $\beta = l$ ,对气相  $\beta = g$ ) 中该分量质量的总和。 $\phi$  是空隙度,  $S_{\beta}$  是相  $\beta$  的饱和度 (即由相  $\beta$  所占的空隙体积与总的空隙体积之比),  $\rho_{\beta}$  为相  $\beta$  的密度,而  $X_{\beta}^{\kappa}$  是分量  $\kappa$  在相  $\beta$  中的质量与其总质量之比。分量  $\kappa$  的质量通量是它在各相内质量通量之和,

$$\mathbf{F}^\kappa = \sum_{\beta} X_{\beta}^{\kappa} \mathbf{F}_{\beta}. \quad (3)$$

各相内的质量通量由多相流形式的 Darcy 定律给出

$$\mathbf{F}_{\beta} = \rho_{\beta} \mathbf{u}_{\beta} = -k \frac{k_{r\beta}}{\mu_{\beta}} (\nabla p_{\beta} - \rho_{\beta} \mathbf{g}). \quad (4)$$

这里  $\mathbf{u}_{\beta}$  是相  $\beta$  的 Darcy 速度 (体积通量),  $k$  为绝对渗透系数,  $k_{r\beta}$  是相  $\beta$  的相对渗透系数,  $\mu_{\beta}$  是相  $\beta$  的动力粘滞系数,相  $\beta$  的压力  $p_{\beta}$  是气相压力  $p$  和毛细压力  $p_{\text{cap}}$  之和,即

$$p_{\beta} = p + p_{\text{cap}}. \quad (5)$$

由 Gauss 散度定理,方程 (1) 可等价地转换为如下形式的偏微分方程

$$\partial M^\kappa / \partial t = -\text{div} \mathbf{F}^\kappa + q^\kappa. \quad (6)$$

方程 (6) 通常用来导出有限差分法或有限元法离散格式的出发点。对于 TOUGH2 中所用的积分有限差分法 (integral finite difference method), 采用方程 (1) 要比采用方程 (6) 更简单和直接。

### 1.2 初始和边界条件

在模型 (1)~(5) 中有 2 个独立变量: 气体压力

和液体饱和度。为求得模型的数值解,必须给定这 2 个变量的初始边界条件。

初始条件选定如下: 根据初始时刻的地下水位, 矩形区域被分为上下两层, 上层为非饱和带 (包气带), 下层为饱和带。在非饱和带, 液体 (水) 饱和度的初始值为滞留饱和度 (即经过理想的重力脱水后滞留在土壤空隙中的水的饱和度), 初始气压设为大气压。在饱和带, 液体 (水) 饱和度的初始值为 1.0, 初始压力为大气压  $p_{\text{atm}}$  和所考察点处水压  $\rho_w g d_s$  之和, 这里  $g$  和  $d_s$  分别是重力加速度和所考察点处的饱和水的深度。

矩形区域的上部边界即地表的气压为大气压。左侧边界上的压力取决于所在边界点的高程  $z$  和  $t$  时刻的海潮高程  $H_{\text{tide}}(t)$ 。当海潮高程高于边界点的高程时, 该点被海水浸没, 该点的压力等于大气压和水压之和。当海潮高程低于边界点的高程时, 该点暴露于大气中, 该点的压力等于大气压。这些条件可综合表示为

$$p = p_a = p_{\text{atm}} + \rho_w g \max\{0, H_{\text{tide}}(t) - z\}. \quad (7a)$$

其中  $p_a$  表示气相 ( $\beta = a$ ) 的压力。高程  $z$  和海潮  $H_{\text{tide}}(t)$  的基准是 mPD (meter above Principle Datum)。水位观测数据表明, 在 500 m 的范围内, 由粗岩块填充料 R2 形成的渗透性很好的水平含水层中水位变化和海潮变化几乎一致。故在模拟中将该含水层的水头值取为海潮高程值。矩形区域下部边界线的高程为  $-0.05$  mPD, 而海潮高程变化范围为  $0.0 \sim 2.5$  mPD, 因此下部边界线总是淹没在海水中。根据式 (7a), 下部边界上各点的压力为

$$p = p_{\text{atm}} + \rho_w g [H_{\text{tide}}(t) + 0.05]. \quad (7b)$$

在模拟中, 海潮高程  $H_{\text{tide}}(t)$  由观测数据经线性插值确定。

由于矩形区域右面是渗透性很低的海砂, 故其右边界上采用了既不透水也不透气的边界条件

$$\frac{\partial p_w}{\partial n} = \frac{\partial p_a}{\partial n} = 0. \quad (7c)$$

其中  $\mathbf{n}$  是边界的单位外法向量。

## 2 数值方法

### 2.1 TOUGH2 模拟程序简介

上述水气两相流数学模型由于其非线性和非均质性, 不可能求出其解析解。笔者选用 TOUGH2 数值模拟程序求数值解。TOUGH2 是一个用 FOR-

TRAN 程序写成的用于解决多孔及裂隙介质中多维多相混合流体及热传导的通用数值模拟程序。TOUGH2 编码包含有 10 个针对不同的流体特性(或状态方程, equation of state, 简称为 EOS)的模块。每个模块是专为不同的流体特性而开发的<sup>[1]</sup>。对于本文所考虑的水气两相流问题,可在等温条件下采用一个被称为 EOS3 的模块。所考察的系统温度假设为 25 °C。在 TOUGH2 程序中,上述数学模型离散后得到一组相互强耦合的非线性代数方程组,其未知变量为各结点上的随时间变化的压力和饱和度。这些方程被写成残量的形式,即{残量}≡{左端项} - {右端项} = 0,然后利用 Newton-Raphson 迭代同时求解。在运行模拟计算的过程中,时间步长能根据迭代过程的收敛速度自动调节(增加或减少)。在多相流问题中,其内在的时间尺度会因系统流动的显著变化而产生好几个量级的变化。因此自动调节时间步长对多相流问题的求解速度是至关重要的。

### 2.2 模型的离散化

在 TOUGH2 中,积分有限差分法(integral finite difference method, 简称 IFDM)<sup>[2,3]</sup>被用来离散模型方程。空间离散直接由积分形式的基本守恒方程(1)导出,而不用将其转化为偏微分方程。时间离散是采用全隐式的一阶向后有限差分。通量和汇源项的计算均在新的时间点进行(全隐式方法)。由于积分有限差分法避开了整体坐标系,使其具有使用一维、二维和三维空间中的规则(如正交的)或不规则的(如三角形或四面体等)离散格式的可能性。

在本文的数值模拟中采用了正交网格。所考察的 500 m 长、7.35 m 高的矩形被分为 39(水平方向)×91(垂直方向)=3 549 个子矩形单元。网格剖分参见图 2。当水气两相流模型被用来描述包气带中的气压的变化及作为包气带和饱和带界面的地下水位的变化时,在地下水位所处的那些矩形单元只能近似地模拟实际情况。严格地说,在这些矩形单元中,在地下水位以上的空隙内主要是空气(滞留的水分只占一小部分),在地下水位以下的空隙则全被水分填满。但是在水气两相流模型中,这些矩形单元的全部空隙被认为是由一种均匀的水气混合物所充满。这种近似在数值模拟时会产生明显的数值波动。为了减缓这种波动,在海潮范围内矩形网格的垂向步长选得很小(0.041 6~0.05 m),最大垂向步长为 0.5 m。水平方向的网格步长变化范围为 3~35 m。

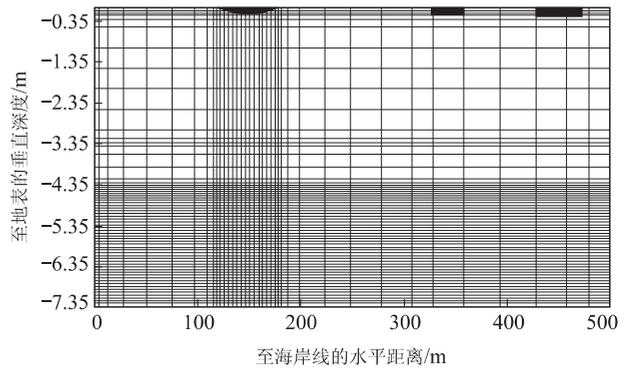


图 2 数值模拟计算中所采用的空间离散网格

Fig. 2 Mesh used in numerical simulation

为实施 Dirichlet 型边界条件,在上下边界采用了厚度很小(0.001 m)的边界矩形单元,而在左面的边界上采用了宽度很小(0.01 m)的边界矩形单元。由于单元太小,在图 2 中未将其标示。

### 2.3 数值模拟中的输入数据

从 2001-02-07 至 2001-02-09 的 72 h 时段被选为模拟时段。这个选择是基于如下考虑:首先,在该时段内有完整的海潮和沥青路面下气压的观测数据(图 3);其次,根据 2001 年香港天文台潮汐数据表,该时段内海潮变幅在整个 2 月份是最大的。

边界条件(7a)和(7b)由图 3 中的实测海潮高程  $H_{\text{tide}}(t)$  确定。(4)式中的项  $k_{\beta}/\mu_{\beta}$  称为相  $\beta$  的迁移率。在数值模拟中,2 个相邻单元界面上的迁移率由完全上游加权法计算,而绝对渗透系数由调和加权法计算。在模拟中所选用的参数值见表 1。为了考察模型参数对沥青路面下气压的影响力,在表 1 最后一列中列出了在时间为 17.5 h 时(从 2001-02-07 凌晨 0 时算起)对应于各模型参数的正则化灵敏度  $\frac{\sigma}{p} \frac{\partial p}{\partial \sigma}$  的数值,这里  $p$  为沥青路面下的空气压力, $\sigma$  为

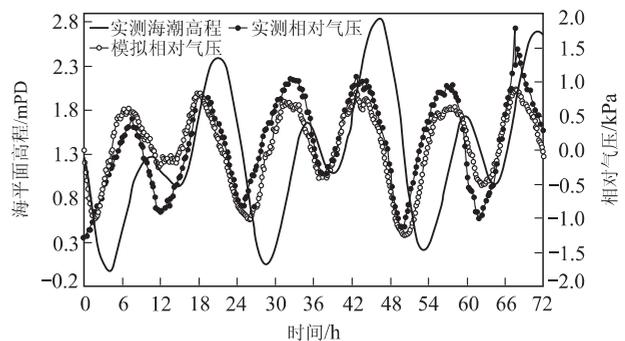


图 3 72 h 时段内的实测海潮和沥青路面下的气压

Fig. 3 Observed and simulated air pressure at point O and observed tidal level between 7 and 9 Feb, 2001

所考察的模型参数. 正则化灵敏度描述了状态变量(这里为沥青路面下面压力)变化的百分比和模型参数  $\sigma$  变化的百分比之比<sup>[4]</sup>. 正则化灵敏度的优点是它能够通过比较各种不同的模型参数来确定参数对状态变量的影响程度. 每一个参数的正则化灵敏度是将该参数从原始值作一小的扰动, 将其余模型参数保持在其原始值求数值解得到的. 表 1 中的前 5 个参数是按照其正则化灵敏度绝对值的大小顺序排列的. 第 1 个是填充料 R1 的空隙度, 第 2, 3 和 4 个参数分别是沥青路面的绝对渗透系数, 填充料 R1 的绝对渗透系数和填充料 S 的绝对渗透系数, 排列第 5 的是填充料 R1 的滞留水饱和度. 其余参数的正则化灵敏度的绝对值由于很小(均小于 0.003), 没有在表中给出具体数值. 对于这些参数来说, 其选用值所含的误差对沥青路面下面压力不会有太大的影响.

填充料 R1 的给水度等于  $\phi_3(1-S_{r13})$ . 由于海潮高程的变化范围处于填充料 R1 内, 因此当地下水位随海潮高程升高时, 从填充料 R1 的空隙排出的空气质量和填充料 R1 的空隙度  $\phi_3$  成正比. 这或许能够解释在表 1 中对应于  $\phi_3$  的正则化灵敏度为何为正而且排列第一. 填充料 R1 的滞留水饱和度  $S_{r13}$  的增加会导致其中由空气所占的空隙的减少, 从而减少了地下水位随海潮升高时从中排出的空气质量. 各填充料的渗透系数越大, 该填充料对空气流动的阻力就越小, 从而当地下水位随海潮升高时空气就能更容易地从中排出, 沥青路面下的气压也就越小. 这能解释在表 1 中对应于滞留水饱和度  $S_{r13}$  和各填充料的渗透系数的正则化灵敏度为何为负.

在数值模拟中采用了线性的相对渗透系数函数和毛细压力函数. 液相的相对渗透系数函数  $k_{rl}$  随着液体饱和度  $S_l$  从  $S_{lr}$  增加到  $1-S_{gr}$  而线性地从 0 增加到 1. 气相的相对渗透系数函数  $k_{rg}$  随着气体饱和度  $S_g$  从  $S_{gr}$  增加到  $1-S_{lr}$  而线性地从 0 增加到 1. 这里  $S_{gr}$  和  $S_{lr}$  分别是气相(空气)和液相(水)的滞留饱和度. 线性毛细压力函数定义为:

$$p_{\text{cap}} = \begin{cases} -p_c, & \text{当 } S_l \leq S_{lr}; \\ 0, & \text{当 } S_l \geq 1 - S_{gr}; \\ -p_c(1 - S_{gr} - S_l) / (1 - S_{gr} - S_{lr}), & \text{当 } S_{lr} < S_l < 1 - S_{gr}. \end{cases} \quad (8)$$

其中  $p_c$  是某种填充料的最大毛细压力. 其选用值参见表 1.

表 1 数值模拟中所用的模型参数值

Table 1 Parameter values used in numerical simulation

符号	定义	模拟中的选用值	正则化灵敏度
$\phi_3$	填充料 R1 的空隙度	0.3	1.28
$k_1$	沥青路面的绝对渗透系数	$5.6 \times 10^{-14} \text{ m}^2$	-0.63
$k_3$	填充料 R1 的绝对渗透系数	$8 \times 10^{-11} \text{ m}^2$	-0.31
$k_2$	填充料 S 的绝对渗透系数	$5 \times 10^{-12} \text{ m}^2$	-0.21
$S_{r13}$	填充料 R1 的滞留水饱和度	0.1	-0.16
$S_{r11}$	沥青路面的滞留水饱和度	0.3	—
$S_{r12}$	填充料 S 的滞留水饱和度	0.5	—
$S_{rg1}$	沥青路面的滞留气饱和度	0.0	—
$S_{rg2}$	填充料 S 的滞留气饱和度	0.0	—
$S_{rg3}$	填充料 R1 的滞留气饱和度	0.0	—
$p_{c1}$	沥青路面的最大毛细压力	500 Pa	—
$p_{c2}$	填充料 S 的最大毛细压力	500 Pa	—
$p_{c3}$	填充料 R1 的最大毛细压力	0 Pa	—
$\phi_1$	沥青路面的空隙度	0.08	—
$\phi_2$	填充料 S 空隙度	0.3	—

### 3 模拟结果

图 3 给出了沥青路面下面(图 1 中的 O 点)气体压力在所选定的 72 h 模拟时段内的观测结果和数值模拟结果, 可以看出气压的观测和数值模拟结果有相同的变化趋势. 气压的观测值达到最大时数值模拟值也达到最大, 气压的观测值达到最小时数值模拟值也达到最小. 不知出于何种原因, 第 1 个气压峰值的观测值明显比其余气压峰值的观测值要小. 这使得气压观测值和数值模拟值间的误差在第 1 个气压峰值附近较为明显. 类似地, 不知出于何种原因, 最后一个气压峰值的观测值明显比其余气压峰值的观测值要大. 这使得气压观测值和数值模拟值间的误差在最后一个气压峰值附近也较为明显. 在起初 2 h 内, 在气压观测值和数值模拟值间存在显著的差异. 这是因为在数值模拟中气压的初始值在整个非饱和带中都假定等于大气压, 而实际上气压在初始状态下在非饱和带中随空间位置而异. 这种有异于实际状态的假想初始条件造成了上述的差异. 由于这种差异是初始条件的影响造成的, 它会随时间而衰减. 从图 3 可以看出, 在 2 h 后, 气压的数值模拟值走势变得和观测值的一样, 初始条件对解的影响变得忽略不计了.

沥青路面下的气压在时间为 18.6 h 时(从 2001-02-07 凌晨 0 时算起)达到最大. 为考察该时刻整个包气带中的气流, 图 4 画出了在该时刻包气带中气流速度场分布的数值模拟结果. 沥青路面下的

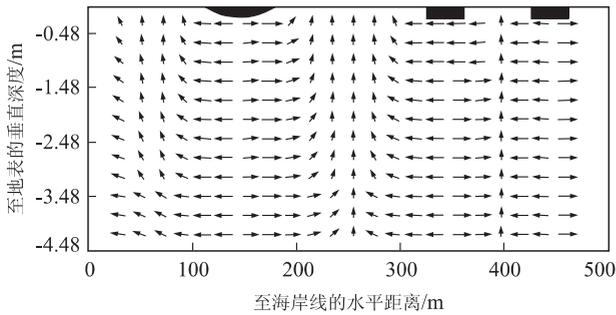


图 4 非饱和带内在 18.6 h 时的模拟速度场

Fig. 4 Velocity field of simulated air flow in the unsaturated zone when time equals 18.6 h

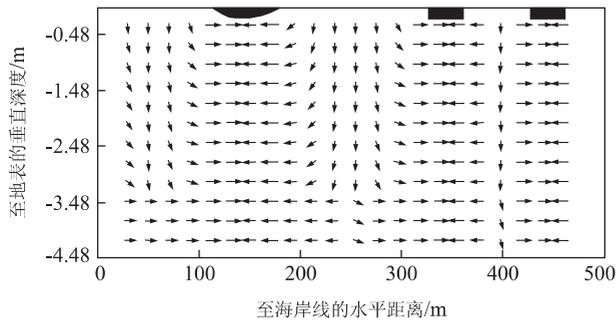


图 5 非饱和带内在 25 h 时的模拟速度场

Fig. 5 Velocity field of simulated air flow in the unsaturated zone when time equals 25 h

气压在时间为 25 h 时达到最小. 图 5 画出了在该时刻包气带中气流速度场分布的数值模拟结果. 从图 4, 5 可以看出, 由于在沥青路面两边的填充料 S 有较长的延伸距离, 每个沥青路面下面的气流速度分布近似地关于每条沥青路的中垂线对称. 在沥青路面下面, 气流的方向几乎是水平的. 这是由于沥青路面几乎不透气所致. 在没有被沥青路面覆盖的地方, 气流方向几乎是垂向的. 从图 3 可以看出, 在从 6~30 h 之间的大约 24 h 的海潮周期内, 海潮的升高速度在时间为 18.6 h 左右时最大. 与海潮几乎同时升高的地下水位压缩了紧靠地下水位上面的包气带中的空气, 从而导致包气带中气压的升高. 在这种情况下地面呼出空气, 图 4 所示的气流速度场清楚地显示了这一点. 类似地, 从图 3 可以看出, 在从第 6~30 h

之间, 海潮的降低速度在时间为 25 h 左右时最大. 当地下水位随海潮同时降低时, 给紧靠地下水位上面的包气带中的空气留出了额外的空隙, 从而导致包气带中气压的降低. 在这种情况下地面吸入空气. 图 5 所示的气流速度场清楚地显示了这一点.

## 4 结论

本文建立了一个描述海潮引起的地下水气两相流的二维数学模型. 该模型被用来模拟香港某填海形成的海滨地区包气带的一个垂向剖面内的气压波动. 剖面含有 3 种材料: 沥青混凝土、岩石填充料 R1 和海砂填充料 S. TOUGH2 模拟程序用来求模型数值解. 通过数值敏感度分析, 研究了影响沥青路面下面气压的主要水文地质因素. 这些因素主要是岩石填充料 R1 的空隙度、渗透系数、滞留水饱和度以及沥青混凝土和海砂填充料 S 的渗透系数. 根据该地区实际水文地质情况, 笔者选取了适当的模型边界条件和模型参数. 在此基础上, 对沥青路面下气压进行了数值模拟. 模拟结果和观测数据吻合程度良好.

## 参考文献:

[1] Pruess K, Oldenburg C, Moridis G. TOUGH2 user's guide, Version 2. 0 [M]. Berkeley, California: Earth Science Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, University of California, 1999.

[2] Edwards A L. TRUMP: A computer program for transient and steady state temperature distributions in multi-dimensional systems [M]. Springfield, VA: National Technical Information Service, National Bureau of Standards, 1972.

[3] Narasimhan T N, Witherspoon P A. An integrated finite difference method for analyzing fluid flow in porous media [J]. Water Resour Res, 1976, 12(1): 57-64.

[4] Jyrkama M I, Sykes J F, Normani S D. Recharge estimation for transient ground water modeling [J]. Ground Water, 2002, 40(6): 638-648.

## Numerical Simulation of Tide-Induced Periodic Air Pressure Fluctuations in Coastal Vadose Zone

LI Hai-long<sup>1,2</sup>, Jiu Jimmy Jiao<sup>2</sup>

(1. *Department of Mathematics and Computer, Anshan Normal College, Anshan 114005, China*; 2. *Department of Earth Sciences, The University of Hong Kong, Hong Kong, China*)

**Abstract:** While it is well known that the groundwater level in coastal areas fluctuates frequently due to tidal seawater, it is not so well-recognized that air pressure in the subsurface soil near the coast may also fluctuate in response to sea tides. If the soil is well capped by less permeable materials such as concrete or asphalt, which is common in the extensively urbanized coastal areas in Hong Kong, significant high pressure may be produced by the watertable fluctuation and causes geotechnical problems such as surface heave. Therefore, understanding air flow induced by tidal fluctuation is of not only theoretical significance but also engineering implications. In this paper, a case study is conducted to explore the air pressure fluctuations observed below the asphalt pavement in a coastal reclamation area of Hong Kong. An isothermal, two-dimensional, cross-sectional model was built to describe the water-air two-phase flow in the unsaturated zone of the area. TOUGH2 simulator was used to obtain the numerical solutions. Sensitivity analysis was carried out to investigate the effects of model parameters on the air pressure fluctuations. After the boundary conditions and the model parameters were derived from the hydrogeological background in the area, the simulation reproduced the observed air pressure below the asphalt pavement with a satisfactorily small error.

**Key words:** water-air two-phase flow; TOUGH2 simulator; sea tide; coastal unsaturated zone; air pressure fluctuation.