

# 三维地形大地电磁场的边界元模拟方法

阮百尧<sup>1</sup>, 徐世浙<sup>2</sup>, 徐志锋<sup>1</sup>

1. 桂林工学院资源与环境工程系, 广西桂林 541004

2. 浙江大学地球科学系, 浙江杭州 310027

**摘要:** 提出了一种用边界元法计算大地电磁场三维地形影响的数值模拟方法。首先用矢量积分理论和电磁场边界条件, 将上半空间(空气)和下半空间(地下介质)两个区域电磁场边值问题变为仅对地形界面的两个矢量面积分方程, 其中一个计算磁场, 称磁场方程; 另一个计算电场, 称电场方程。然后将对地形界面的积分剖分为一系列的三角单元积分。在三角单元积分中, 假设单元中电磁场为水平均匀大地空间电磁场与地形影响的迭加, 并假设地形影响为常项, 这样既保证了计算精度又使得计算方法简便。通过分解和计算, 每一个矢量面积分方程分解为对应 3 个坐标方向的 3 个常量线性方程, 这些线性方程组成了对角占优的线性方程组, 可用 SSOR 方法求解。文中给出了 2 个三维地形上大地电磁视电阻率曲线的计算结果。

**关键词:** 三维地形; 大地电磁; 边界元法; 数值计算。

中图分类号: P631.3

文章编号: 1000-2383(2007)01-0130-05

收稿日期: 2006-02-15

## Modeling the 3D Terrain Effect on MT by the Boundary Element Method

RUAN Bai-yao<sup>1</sup>, XU Shi-zhe<sup>2</sup>, XU Zhi-feng<sup>1</sup>

1. Department of Resources & Environmental Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China

2. Department of Geosciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

**Abstract:** A numerical method is put forward in this paper, using the boundary element method (BEM) to model 3D terrain effects on magnetotelluric (MT) surveys. Using vector integral theory and electromagnetic field boundary conditions, the boundary problem of two electromagnetic fields in the upper half space (air) and lower half space (earth medium) was transformed into two vector integral equations just related to the topography: one magnetic equation for computing the magnetic field and the other electrical equation for computing the electrical field. The topography integral is decomposed into a series of integrals in a triangle element. For the integral in a triangle element, we suppose that the electromagnetic field in it is the stack of the electromagnetic field in the homogeneous earth and the topography response which is a constant; so the computation becomes simple, convenient and highly accurate. By decomposition and computation, each vector integral equation can be calculated by solving three linear equations that are related to the three Cartesian directions. The matrix of these linear equations is diagonally dominant and can be solved using the Symmetric Successive Over-Relaxation (SSOR) method. The apparent resistivity curve of MT on two 3D terrains calculated by BEM is shown in this paper.

**Key words:** 3D terrain; MT; boundary element method; numerical modeling.

大地电磁场地形影响数值模拟国内外已有不少研究, 如 Chouteau and Bouchard(1988)和 Wannamaker *et al.* (1986)用有限元法模拟了二维地形对大地电磁测深信号的影响; Xu *et al.* (1997b)用边界元法模拟了二维地形影响; 后来, 徐世浙(1995)、徐

世浙等(1997a)、阮百尧和王有学(2005)又用边界元法模拟了大地电磁测深的三维地形影响。

本文在徐世浙、阮百尧和周辉等人研究基础上, 对原来需要在地上空气介质和地下导电介质 2 个区域的边界面积分通过迭加方法变为只对地形界面的

面积分,对原来只考虑磁场方程变为同时考虑磁场方程和电场方程,对原来三角单元电磁场使用零次插值改为仅地形影响项采用零次插值.由于这些改进,不仅使方法的计算精度得到了提高,而且使最后形成的线性方程组具有明显的对角占优特征,可用 SSOR 方法求解,因此与原方法相比大大提高了计算速度.

### 1 电磁场边界积分方程

MT 中的初始波是垂直入射的平面波,设初始磁场  $H$  的偏振方向沿  $x$  轴(图 1),时间因子为  $e^{-i\omega t}$ . 选取足够大的六面体区域,期间被三维地形  $\Gamma$  所分割,地形上部记为  $\Omega_1$ ,是空气;地形下部记为  $\Omega_2$ ,是充满电导率为  $\sigma$  的均匀岩石. 设地形起伏局限于区域的中部,由于区域足够大,地形在六面体边界  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  上产生的异常电磁场为零. 若取  $AB$  处的磁场  $H_x$  为单位磁场,可得到磁场和电场的边界条件如下:

地形以上边界  $\Gamma_1$

$$\begin{cases} H_x = \cos(k_1 z) + i \frac{k_1}{k_2} \sin(k_1 z) & H_y = H_z = 0 \\ E_y = -\frac{\omega\mu}{k_2} [\cos(k_1 z) + i \frac{k_2}{k_1} \sin(k_1 z)] & E_x = E_z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

地形以下边界  $\Gamma_2$

$$\begin{cases} H_x = e^{ik_2 z} & H_y = H_z = 0 \\ E_y = -\frac{\omega\mu}{k_2} H_x & E_x = E_z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $k_1 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}$ ,  $k_2 = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$ ,  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ,  $\epsilon =$

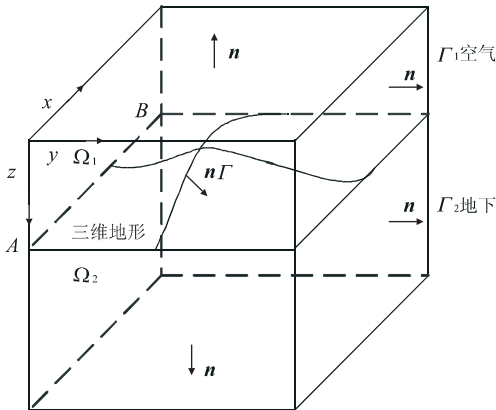


图 1 区域与边界

Fig. 1 Domain and boundary

$\Omega_1$ . 空气; $\Omega_2$ . 地下均匀岩石; $\Gamma$ . 三维地形; $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ . 分别表示上下部无穷远边界; $n$ . 表示法向

$$\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}.$$

设地形以上  $\Omega_1$  区域中电磁场场强为  $E_1, H_1$ , 从 Maxwell 方程经过矢量分析,可推算得如下积分方程(徐世浙等,1997a):

$$\begin{cases} \frac{\omega_{p_1}}{4\pi} E_1(p_1) + \int_{\Gamma} [(E_1 \cdot n_1) \nabla \varphi_1 + (n_1 \times E_1) \times \nabla \varphi_1 + i\omega\mu(n_1 \times H_1) \varphi_1] d\Gamma = E_{1b}(p_1) \\ \frac{\omega_{p_1}}{4\pi} H_1(p_1) + \int_{\Gamma} [(H_1 \cdot n_1) \nabla \varphi_1 + (n_1 \times H_1) \times \nabla \varphi_1 - i\omega\epsilon(n_1 \times E_1) \varphi_1] d\Gamma = H_{1b}(p_1) \end{cases} \quad (3)$$

式中  $p_1$  为区域  $\Omega_1$  中一点; $\omega_{p_1}$  是  $p_1$  点对区域  $\Omega_1$  所张的立体角,当  $p_1$  点在区域  $\Omega_1$  内时  $\omega_{p_1} = 4\pi$ ,  $\Gamma$  为地形边界; $n_1$  垂直地面向下; $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi r} e^{ik_1 r}$  是区域  $\Omega_1$  中基本解,其中  $r$  是  $p_1$  点至积分点的距离.

$$\begin{cases} E_{1b}(p_1) = - \int_{\Gamma_1} [(E_1 \cdot n) \nabla \varphi_1 + (n \times E_1) \times \nabla \varphi_1 + i\omega\mu(n \times H_1) \varphi_1] d\Gamma \\ H_{1b}(p_1) = - \int_{\Gamma_1} [(H_1 \cdot n) \nabla \varphi_1 + (n \times H_1) \times \nabla \varphi_1 - i\omega\epsilon(n \times E_1) \varphi_1] d\Gamma \end{cases} \quad (4)$$

上式是边界影响项,由于边界  $\Gamma_1$  上场值已知式(1),因此  $E_{1b}(p_1)$  和  $H_{1b}(p_1)$  是已知项,可以通过高斯数值积分求得.

同理,若地形以下  $\Omega_2$  区域场强为  $E_2, H_2$ , 有

$$\begin{cases} \frac{\omega_{p_2}}{4\pi} E_2(p_2) + \int_{\Gamma} [(E_2 \cdot n_2) \nabla \varphi_2 + (n_2 \times E_2) \times \nabla \varphi_2 + i\omega\mu(n_2 \times H_2) \varphi_2] d\Gamma = E_{2b}(p_2) \\ \frac{\omega_{p_2}}{4\pi} H_2(p_2) + \int_{\Gamma} [(H_2 \cdot n_2) \nabla \varphi_2 + (n_2 \times H_2) \times \nabla \varphi_2 + (\sigma - i\omega\epsilon)(n_2 \times E_2) \varphi_2] d\Gamma = H_{2b}(p_2) \end{cases} \quad (5)$$

式中  $p_2$  为区域  $\Omega_2$  中一点, $\omega_{p_2}$  是  $p_2$  点对区域  $\Omega_2$  所张的立体角, $\Gamma$  为地形边界, $n_2$  垂直地面向上, $\varphi_2 = \frac{1}{4\pi r} e^{ik_2 r}$  是区域中基本解.

$$\begin{cases} E_{2b}(p_2) = - \int_{\Gamma_2} [(E_2 \cdot n) \nabla \varphi_2 + (n \times E_2) \times \nabla \varphi_2 + i\omega\mu(n \times H_2) \varphi_2] d\Gamma \\ H_{2b}(p_2) = - \int_{\Gamma_2} [(H_2 \cdot n) \nabla \varphi_2 + (n \times H_2) \times \nabla \varphi_2 + (\sigma - i\omega\epsilon)(n \times E_2) \varphi_2] d\Gamma \end{cases} \quad (6)$$

同样,上式是已知的边界影响项,可以通过高斯数值

积分求得.

根据界面上电场和磁场切向分量连续、电流密度法向分量连续,当  $p_1, p_2$  点位于地面上  $p$  点时,有

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 = -\mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{i\omega\epsilon}{\sigma - i\omega\epsilon} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}_1 = -(1-\alpha)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{H}_2 = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{H}_1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\omega_{p_1} + \omega_{p_2} = 4\pi \quad (9)$$

式中:  $\alpha = \frac{i\omega\epsilon}{\sigma - i\omega\epsilon} + 1$ .

用边界条件(7)、(8)、(9)将(5)式中的电磁场  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  变换成  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ , 然后与(3)式相加,就可得到下面的三维地形问题电磁场边界积分方程:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(p) - \alpha \mathbf{E}_n(p) (1 - \frac{\omega_p}{4\pi}) \mathbf{n}_p + \int_{\Gamma} \{ \mathbf{E}_n [ \nabla(\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha \nabla \varphi_2 ] + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla(\varphi_1 - \varphi_2) + i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})(\varphi_1 - \varphi_2) \} d\Gamma = \mathbf{E}_{1b}(p) + \mathbf{E}_{2b}(p) \\ \mathbf{H}(p) + \int_{\Gamma} \{ (\mathbf{H}_n \nabla(\varphi_1 - \varphi_2) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla(\varphi_1 - \varphi_2) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) [ i\omega\epsilon(\varphi_1 - \varphi_2) + \sigma\varphi_2 ] \} d\Gamma = \mathbf{H}_{1b}(p) + \mathbf{H}_{2b}(p) \end{cases} \quad (10)$$

式中,由于电场与磁场下标都为 1,即统一到上半空间区域的电场和磁场,所以为了简化,去掉电场和磁场下标 1. 其中  $\mathbf{E}_n$  和  $\mathbf{H}_n$  为电场和磁场的法向分量,  $\mathbf{n}_p$  为地形界面上  $p$  点的法向矢量. 通常(10)式第一个方程称为电场方程,第二个方程称为磁场方程. 解上述边界积分方程,即可求得三维地形的大地电磁响应.

## 2 边界元方法

用三角形将三维地形剖分成  $M$  个单元,如图 2 所示,并取单元的中心为节点,这时,节点上的  $\omega_p = 2\pi$ ,将(10)式中对地面  $\Gamma$  的积分分解为各三角单元  $\Gamma_j$  积分之和,这样对  $p$  点(假设为第  $i$  个节点)(10)式可写成:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i - \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}_n \mathbf{n}_i + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \{ \mathbf{E}_n [ \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \alpha \nabla \varphi_{2i} ] + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H})(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) \} d\Gamma = \mathbf{E}_{bi} \\ \mathbf{H}_i + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \{ \mathbf{H}_n \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) [ i\omega\epsilon(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \sigma\varphi_{2i} ] \} d\Gamma = \mathbf{H}_{bi} \end{cases} \quad (11)$$

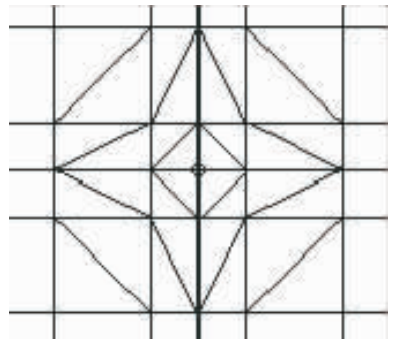


图 2 单元网格剖分示意图

Fig. 2 Gridding diagram

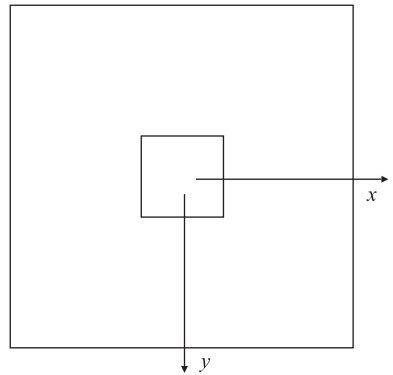


图 3 算例 2、3 地形平面图

Fig. 3 Plan view of terrain in examples 2 and 3

式中基本解  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的下标  $i$  表示其中的  $r$  是从节点  $i$  至积分点的距离,

$$\mathbf{E}_{bi} = \mathbf{E}_{1b}(p) + \mathbf{E}_{2b}(p), \mathbf{H}_{bi} = \mathbf{H}_{1b}(p) + \mathbf{H}_{2b}(p).$$

三角单元  $\Gamma_j$  中任意一点  $p$  的电磁场  $\mathbf{E}(p)$  和  $\mathbf{H}(p)$  为水平大地空间上的电磁场  $\mathbf{E}_p(p)$  和  $\mathbf{H}_p(p)$  以及地形影响之和. 为计算简便,假设单元内地下空间影响项为常量,即单元内电场和磁场满足以下关系:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_j + (\mathbf{E}_p - \mathbf{E}_{pj}) \quad (12)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j + (\mathbf{H}_p - \mathbf{H}_{pj})$$

将(12)式代入(11)式,有

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i - \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}_n \mathbf{n}_i + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \{ \mathbf{E}_n [ \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \alpha \nabla \varphi_{2i} ] + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_j) \times \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j) \} \int_{\Gamma_j} (\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) d\Gamma = \mathbf{E}_{bi} + \mathbf{E}_{ci} \\ \mathbf{H}_i + \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \{ \mathbf{H}_n \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j) \times \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_j) \} \int_{\Gamma_j} [ i\omega\epsilon(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \sigma\varphi_{2i} ] d\Gamma = \mathbf{H}_{bi} + \mathbf{H}_{ci} \end{cases} \quad (13)$$

其中

表 1 水平均匀大地上 MT 边界元法计算结果( $T=0.1$  s)

Table 1 Result obtained by the MT boundary element method in the horizontal homogeneous half-space

纵剖面: $y=1.667$ m								
$x$ (m)	1.667	6.667	11.667	16.667	21.667	26.667	31.667	36.667
$\rho_a$ ( $\Omega \cdot m$ )	99.6	99.6	99.6	99.6	99.7	99.7	99.8	99.9
横剖面: $x=1.667$ m								
$y$ (m)	1.667	6.667	11.667	16.667	21.667	26.667	31.667	36.667
$\rho_a$ ( $\Omega \cdot m$ )	99.6	99.7	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4

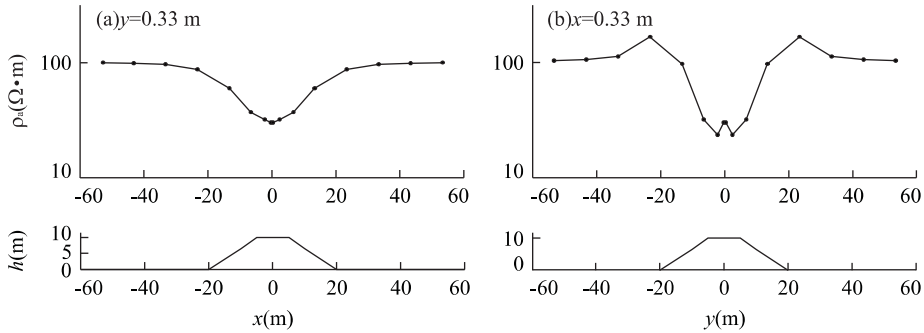


图 4 三维正地形上 MT 视电阻率曲线( $T=0.1$  s)

Fig. 4 MT apparent resistivity plot in the uplifted topography

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{ci} = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \{ (\mathbf{E}_{pj} - \mathbf{E}_{pi}) [ (\nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \alpha \nabla \varphi_{2i}) + \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{pj} - \mathbf{E}_p) \times \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + i\omega \mu \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{pj} - \mathbf{H}_p)(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) ] d\Gamma \\ \mathbf{H}_{ci} = \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \{ (\mathbf{H}_{pj} - \mathbf{H}_{pi}) \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{pj} - \mathbf{H}_p) \times \nabla(\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{pj} - \mathbf{E}_p) [ i\omega \varepsilon (\varphi_{1i} - \varphi_{2i}) + \sigma \varphi_{2i} ] \} d\Gamma \end{cases} \quad (14)$$

上式中基本函数、水平大地上的电场和磁场都是已知的,所以可用高斯数值积分法求得  $\mathbf{E}_{ci}$  和  $\mathbf{H}_{ci}$ 。

边界积分方程(13)是矢量方程,可分解成  $x, y, z$  方向上的 6 个常量线性方程,其中 3 个由电场方程所得,3 个由磁场方程所得。由于每个节点的积分方程(13)都可得到 6 个常量线性方程,则  $M$  个单元(节点)可得到  $6M$  个线性方程。这些方程组成明显对角占优的线性方程组,可用超松弛迭代法(SSOR)求解。

求得地表各单元节点上的电磁场后,便可用积分方程(3)、(4)计算出地表上方空气介质中或地表下方岩石介质中任意一点的电磁场。

### 3 视电阻率的计算

$H_x$  极化时 MT 视电阻率公式为:

$$\rho_a = \frac{i}{\omega \mu^t} \left( \frac{E_y}{H_x} \right)^2 \quad (15)$$

### 4 算例

考虑到地形起伏处电磁场变化较大,设计采用以地形起伏中心为中心点,先进行  $x$  方向和  $y$  方向的直线剖分,再用斜线以围绕中心的方向将矩形单元剖分为三角单元,如图 2 所示,然后读入节点上的高程。地下介质电阻率取  $100 \Omega \cdot m$ 。MT 中的初始磁场  $H$  的偏振方向沿  $x$  轴,  $T$  取  $0.1$  s。

算例 1,均匀水平半空间大地。由于本文所设边界条件的限制,本文所给算法不能计算二维地形上的视电阻率曲线。因此,为了观测本文方法的计算精度,我们用对均匀水平空间大地的视电阻率计算作为检验标准。取  $x$  方向和  $y$  方向节点数均为 19,取  $\Delta x$  和  $\Delta y$  为等距:5 m。计算结果见表 1。

算例 2,三维正地形,平面图见图 3。纵剖面( $y=0.33$  m)视电阻率曲线见图 4a,横剖面( $x=0.33$  m)见图 4b。从图中可见,三维正地形影响,在地形隆起处,视电阻率值变小。

算例 3,三维负地形,平面图与算例 2 相同,见图 3。从计算结果(图 5)可见,由于三维负地形的影响,在地形凹陷处,视电阻率变大。

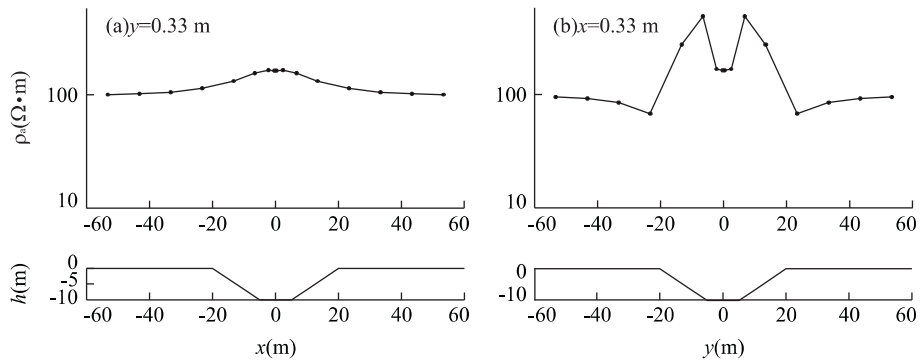


图 5 三维负地形上 MT 视电阻率曲线( $T=0.1$  s)

Fig. 5 MT apparent resistivity plot in the 3D depressed topography

## 5 结论

本文介绍的三维地形大地电磁场的边界元计算方法,通过(1)利用电磁场边界条件,将上半空间(空气)和下半空间(地下介质)两个区域电磁场边值问题变为仅对地形界面的两个矢量面积分方程;(2)在边界元积分中,假设单元中电磁场为水平均匀大地电磁场与地形影响的迭加,并假设地形影响为常项等手段,使计算方法显得简便快速,并保证了计算精度。

## References

- Chouteau, M., Bouchard, K., 1988. Two-dimensional terrain correction in magnetotelluric surveys. *Geophysics*, 53: 854—862.
- Ruan, B. Y., Wang, Y. X., 2005. A boundary element modeling method for the electromagnetic field by artificial source in frequency domain with 3-D topography. *Chinese J. Geophys.*, 48(5): 1197—1204 (in Chinese with English abstract).

- Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., Rijo, L., 1986. Two-dimensional topographic responses in magnetotelluric model using finite elements. *Geophysics*, 51: 2131—2144.
- Xu, S. Z., 1995. The boundary element method in geophysics. Science Press, Beijing (in Chinese).
- Xu, S. Z., Ruan, B. Y., Zhou, H., et al., 1997a. Numerical modeling of 3-D terrain effect on MT field. *Science in China (Series D)*, 43(2): 269—275 (in Chinese).
- Xu, S. Z., Ruan, B. R., Zhou, H., et al., 1997b. Modeling the 2D terrain effect on MT by the boundary element method. *Geophysical Prospecting*, 45: 931—943.

## 附中文参考文献

- 阮百尧, 王有学, 2005. 三维地形频率域人工源电磁场的边界元模拟方法. *地球物理学报*, 48(5): 1197—1204.
- 徐世浙, 1995. 地球物理中的边界元法. 北京: 科学出版社.
- 徐世浙, 阮百尧, 周辉, 等, 1997a. 大地电磁场三维地形影响的数值模拟. *中国科学(D辑)*, 43(2): 269—275.