

# 自流井有限差分模拟的校正模型

王旭升

中国地质大学水资源与环境学院, 北京 100083

**摘要:** 自流井是井孔—含水层系统的一种典型水文地质现象,但在地下水资源评价和管理模型中研究较少。目前地下水数值模拟对自流井的3种处理方法均不合理,也缺乏验证。常规地下水有限差分法既不能准确地求出抽水井的井中水位,也不能准确地求出自流井的流量,必须进行校正。考虑自流井周围的径向流,通过与井点附近地下水流的解析解相结合,提出了矩形网格有限差分模拟的自流井校正模型,其中考虑了自流井周围含水层存贮量的释放。算例表明,即使用千米级大尺度网格,本校正模型也能够获得相当精确的自流井流量,绝大多数情况下相对误差小于5%。

**关键词:** 地下水;自流井;数值模拟;有限差分法。

**中图分类号:** P641

**文章编号:** 1000-2383(2008)01-0112-05

**收稿日期:** 2007-01-18

## Revised Model for Finite-Difference Modeling of Flowing Artesian Wells

WANG Xu-sheng

*Faculty of Water Resources & Environment, China University of Geosciences, Beijing 100083, China*

**Abstract:** It is a typical hydrogeological phenomenon for flowing artesian wells occur in aquifer-well systems. However, these wells have been seldom analyzed in the models for assessment and management of groundwater resources. The three treatment methods of flowing artesian wells that applied currently in numerical modeling of groundwater flow are unreasonable and are not verified. It proves that conventional finite-difference method can neither give accurately the water table in a pumping well, nor the flow rate of a flowing artesian well. The calculated head or flow rate of well-element must be revised. Applying analytical method, a revised model of flowing artesian wells is developed for finite-difference grid with rectangle cells, taking into account of the radial flow in the vicinity of an artesian well, and the release of storage in the confined aquifer surrounding the artesian well. Examples indicate that this revised model of flowing artesian wells gives a significantly improved numerical result of flow rate, with average relative errors less than 5% even for 1 000-m-magnitude cell size.

**Key words:** groundwater; flowing artesian well; numerical modeling; finite-difference method.

## 0 引言

对于穿越深部含水层的水井,如果地下水的测压水位高于地面,地下水无需抽取即可自动流出,这种水井被称为自流井。自流井是井孔—含水层系统的一种典型水文地质现象,普遍存在于大型地下水盆地、冲洪积扇前缘以及大型岩溶上升泉周围。例如,我国鄂尔多斯白垩系自流盆地有数万平方公里的自流区(刘世安等,1996);著名的澳大利亚大自流

盆地面积  $1.5 \times 10^6 \text{ km}^2$ , 含有 4 700 多口自流井,年出流量达到  $4.38 \times 10^8 \text{ m}^3$  (Welsh, 2000; Fensham and Fairfax, 2003)。在这些地区,自流井是人类的重要水源之一。

相对抽水井的研究,在地下水资源评价和管理模型中,自流井的研究程度较低。地下水动力学理论把自流井处理为定降深井得到了解析解,用于含水层参数反演(肖明贵等,2003)。解析解只适合简单理想条件,复杂条件需要借助数值模拟的办法进行分析。然而,自流井的数值模拟方法只有少量文献的介

绍, 可以概括为以下 3 种:

(1) 最简单的做法是给定自流井的流量, 从而借用抽水井的方法进行模拟. 最近提出的澳大利亚大自流盆地模型(GABFLOW), 就是直接给定自流井流量, 用 MODFLOW 中的 Well Package 进行计算的(Welsh, 2000). 这种方法的问题在于自流井与抽水井具有不同的性质, 抽水井的流量可以人工控制, 而自流井的流量是需要预测且不断变化的, 预先给定的流量不能代表未来地下水流场的演变.

(2) 与定降深井流解析法的思路一致, 把包含自流井的数值单元处理为定水头边界, 自流井的流量等于计算的该边界位置的地下水损失速率. 然而, 这种方法的准确性尚未得到证实.

(3) 在含水层水头与自流井流量之间假定一个线性的经验公式, 这样数值模型中的自流井就变成了第三类边界. 早期的澳大利亚大自流盆地模型(GABHYD)就是在 MODFLOW 基础上, 把含水层的测压水位与一个固定系数相乘得到自流井的流量(Seidel, 1978). Merritt (1997) 在模拟美国 Florida 州的一个自流井时, 借用 SWIP 程序中的井指数(Well Index)建立了井流量与水头差之间的关系. 这种方法引入了新的模型参数, 具有经验性质, 并不意味着能够准确地反映自流井的特征. 新参数的引入也增加了模型反演辨识方面的困难, 这是澳大利亚大自流盆地模型从 GABHYD 退回到 GABFLOW 而采用第(1)种方法的原因之一.

可见, 上述 3 种方法都存在明显的缺陷, 也没有经过认真的检验. 因此, 发展自流井的数值模拟方法是具有挑战性的任务. 本文通过对常规有限差分法处理井流问题进行分析, 以抽水井有限差分校正模型为启发, 提出自流井的一种有限差分校正模型.

## 1 常规有限差分法的误差分析

目前在对抽水井的数值模拟中, 人们已经发现常规方法无法准确计算井中水位, 并提出了校正模型. 以 MODFLOW (McDonald and Harbaugh, 1988) 的格点中心法水流模块(Block-Centered Flow Package)为例, 井点流量是作为一个源汇项放入地下水流差分方程中的. 对于一个单层的承压含水层正方形网格模型, 如果某格点 $(i, j)$ 包含抽水井(图 1), 则格点中心法建立如下的差分方程:

$$T[(H_{i+1,j}^k - H_{i,j}^k) + (H_{i-1,j}^k - H_{i,j}^k) + (H_{i,j+1}^k - H_{i,j}^k) +$$

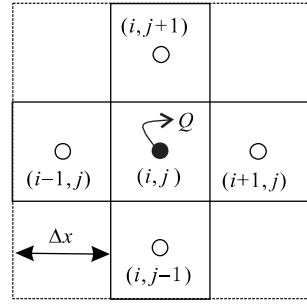


图 1 正方形差分网格示意图

Fig. 1 Schematic representation of finite-difference grid with square cells

$$(H_{i,j-1}^k - H_{i,j}^k)] - Q = S\Delta x^2 \frac{H_{i,j}^k - H_{i,j}^{k-1}}{\Delta t}, \quad (1)$$

式(1)中: $H_{i,j}$ ,  $H_{i+1,j}$ ,  $\dots$ ,  $H_{i,j-1}$ 为格点 $(i, j)$ 及其相邻格点的水头;上标 $k$ 表示时步数(该方程采用了隐格式), 时间步长为 $\Delta t$ ;  $T$ 和 $S$ 为含水层的导水系数和贮水系数; $Q$ 为抽水井的流量.

Prickett(1967)发现利用方程(1)计算得到的 $H_{i,j}$ , 并非抽水井的水位, 而相当于离开抽水井中心距离 $r_{eq}$ 处的含水层水头,  $r_{eq}$ 与网格尺寸的近似关系为:

$$r_{eq} = 0.208\Delta x, \quad (2)$$

通常数值模型的网格单元尺寸在 10 m 以上, 计算出来的 $r_{eq}$ 远大于抽水井的半径 $r_w$ . 因此数值法计算的水头也显著的高于抽水井的水位. 在假定抽水井附近地下水呈拟稳定流的情况下, 可以对模型计算水头进行校正, 得到更加合理的水头值作为抽水井的水位 $H_w$ (陈崇希和唐仲华, 1990):

$$H_w = H_{i,j} - \frac{Q}{2\pi T} \left( \ln \frac{\Delta x}{r_w} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (3)$$

这就是承压含水层抽水井有限差分法的校正模型.

这种问题同样存在于自流井. 如果按自流井的性质将其处理为定水头边界, 则式(1)中 $H(i, j) = H_w$ , 在不考虑井损的情况下 $H_w$ 可设为井口高程, 而流量 $Q$ 成为待求变量. 根据(1)式:

$$Q = T[(H_{i+1,j}^k - H_w) + (H_{i-1,j}^k - H_w) + (H_{i,j+1}^k - H_w) + (H_{i,j-1}^k - H_w)], \quad (4)$$

为检验流量计算是否正确, 考虑井周的轴对称稳定流条件, 令 $H_{i+1,j} = H_{i-1,j} = H_{i,j+1} = H_{i,j-1} = H_p$ , 则实际流量 $Q_w$ (以流向井为正)可用下面的解析式得到:

$$Q_w = 2\pi T \frac{H_p - H_w}{\ln(\Delta x / r_w)}, \quad (5)$$

而(4)式变为:  $Q = 4T(H_p - H_w)$ , (6)

于是有:

$$Q_w = \frac{\pi}{2} \frac{Q}{\ln(\Delta x/r_w)}. \quad (7)$$

显然,模型计算流量  $Q$  通常偏大于自流井的实际流量  $Q_w$ ,只有当  $\Delta x = 4.81r_w$  时两者才近似相等.随着网格单元尺寸增大,模型计算流量的误差也增大.

以上分析表明,常规有限差分法既不能准确地求出抽水井的井中水位,也不能准确地求出自流井的流量,必须进行校正.

## 2 校正模型

在有限差分法中,当自流井所在单元处理为定水头边界且周围网格均匀时,式(7)可以作为自流井的校正模型.但是,它只适用于均匀正方形网格,也没有考虑自流井附近存贮量的释放.因此,应该考虑更加适用的自流井校正模型.

本文在若干假定条件下提出无越流承压含水层自流井校正模型:(1)在自流井附近,含水层是均质各向同性的;(2)井损可以忽略不计;(3)自流井附近为径向流,且水头降低引起的存贮量释放均匀分布,即保留常规数值模型中的贮量集合法.显然,假设(3)会给模型带来系统的误差,误差是否在期望值(相对误差 5%)内必需通过实际应用加以检验.

在这种情况下,自流井附近的地下水水流可以采用轴对称控制方程描述:

$$\frac{T}{S} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} = -\epsilon(t), \quad (8)$$

式(8)中,  $\epsilon(t)$  为含水层的降深速率,在假设(3)下与径向距离  $r$  无关.进一步应用边界条件:

$$H|_{r=r_w} = H_w, Q_w = 2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r} |_{r=r_w}, \quad (9)$$

可以得到解析解:

$$H(r) - H_w = \frac{Q_w + \pi \epsilon S r_w^2}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_w} - \frac{\epsilon S}{4T} (r^2 - r_w^2). \quad (10)$$

式(10)中时间符号已经被省略,实际上水头、流量等是时间的函数,但在每个时刻它们的关系都满足(10)式.

在矩形网格有限差分法中(图 2),井点单元在  $k$  时步的隐式差分方程可写为:

$$T(\Delta x \frac{H_1 - H_0}{L_1} + \Delta y \frac{H_2 - H_0}{L_2} + \Delta x \frac{H_3 - H_0}{L_3} +$$

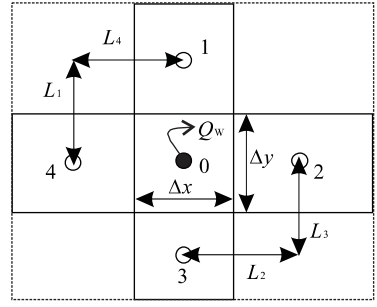


图 2 不均匀矩形差分网格示意图

Fig. 2 Schematic representation of finite-difference grid with rectangle cells

$$\Delta y \frac{H_4 - H_0}{L_4} - Q_w = -\epsilon S \Delta x \Delta y, \quad (11)$$

为简化,式(11)中的水头和流量符号中的时间刻度  $k$  被略去了.  $L_i (i=1, 2, 3, 4)$  是 4 个相邻格点与井点的距离(图 2).而  $\epsilon$  的差分形式为:

$$\epsilon = -\frac{\Delta H_0}{\Delta t} = -\frac{H_0^k - H_0^{k-1}}{\Delta t}, \quad (12)$$

式(12)中  $H_0$  是井点单元水头的一个特征值.周围单元水头应同时满足由式(10)表示的解析解,因此

$$H_i = H_w + \frac{Q_w + \pi \epsilon S r_w^2}{2\pi T} \ln \frac{L_i}{r_w} - \frac{\epsilon S}{4T} (L_i^2 - r_w^2), \quad (13)$$

$i = 1, 2, 3, 4$ ,

式(13)代入式(11)得到如下关系式:

$$A(H_w - H_0) + \frac{B}{T} Q_w - \frac{\epsilon S}{T} C = Q_w - \frac{\epsilon S \Delta x \Delta y}{T}, \quad (14)$$

式(14)中:  $A = \sum_{i=1}^4 \lambda_i$ ,  $B = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 (\lambda_i \ln \frac{L_i}{r_w})$ ,  $C =$

$\sum_{i=1}^4 [\frac{\lambda_i}{4} (L_i^2 - r_w^2)] - \pi r_w^2 B$ ,  $\lambda_1 = \Delta x/L_1$ ,  $\lambda_2 = \Delta y/L_2$ ,  $\lambda_3 = \Delta x/L_3$ ,  $\lambda_4 = \Delta y/L_4$ , 系数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  仅仅是与网格形状有关的常数,与含水层的性质无关.从式(14)可以得到自流井的流量表达式:

$$Q_w = \frac{A}{B-1} T(H_0 - H_w) + \epsilon S \frac{C - \Delta x \Delta y}{B-1}, \quad (15)$$

式(11)和式(15)共同构成了自流井模型的耦合求解公式.由方程(11)得到的特征水头  $H_0$  比自流井水头  $H_w$  更加接近自流井单元面积范围内的含水层平均水头,可以反映自流井附近地下水存贮量的变化.

如果把式(15)代入式(11),就可以得到自流井单元的直接差分方程:

$$Q - \frac{A}{B-1} T(H_0 - H_w) = \frac{B - (C/\Delta x \Delta y)}{B-1} S \Delta x \Delta y \frac{\Delta H_0}{\Delta t} \quad (16)$$

其中:

$$Q = T(\Delta x \frac{H_1 - H_0}{L_1} + \Delta y \frac{H_2 - H_0}{L_2} + \Delta x \frac{H_3 - H_0}{L_3} + \Delta y \frac{H_4 - H_0}{L_4}) \quad (17)$$

是采用常规数值法计算的流向自流井单元的侧向流量。在确定了自流井的水头  $H_w$  之后, 以式(16)为差分方程可以求出特征水头  $H_0$ , 然后代入式(15)即得到自流井的流量。

显然, 对均匀网格, 有  $\Delta x = \Delta y, \lambda_i = 1, A = 4, B = (2/\pi) \ln(\Delta x/r_w)$ , 当井周地下水贮量变化被忽略不计时,  $\epsilon = 0$ , 则式(15)变为:

$$Q_w = \frac{2\pi T(H_0 - H_w)}{\ln(r_{eq}/r_w)} \quad (18)$$

(18)式中:

$$r_{eq} = \frac{\Delta x}{\exp(\pi/2)} \approx 0.208\Delta x \quad (19)$$

式(19)与式(2)~(3)给出的结果是相通的。

### 3 算例验证

为了验证上述校正模型的可靠性, 本文设计一个无限延伸的均质各向同性承压含水层, 初始水头为 20 m, 单个自流井从含水层排出地下水, 自流井的水头为  $H_w = 0$  m, 井半径为  $r_w = 0.15$  m, 含水层参数分两组: (a)  $T = 100 \text{ m}^2/\text{d}, S = 1 \times 10^{-5}$ ; (b)

$T = 10 \text{ m}^2/\text{d}, S = 1 \times 10^{-4}$ . 数值模拟采用为正方形网格有限差分法, 模型长度范围是  $41 \text{ km} \times 41 \text{ km}$ , 达到公里级, 以降低模型有限边界的影响。模型网格的单元宽度对应两组含水层参数分别为: (a)  $\Delta x = 500 \text{ m}$ ; (b)  $\Delta x = 2000 \text{ m}$ . 这种单元宽度的数量级适合于流域尺度的地下水模拟, 因此可以说明校正模型对大尺度条件的适用性。自流井放置在模型中心部位的单元中。

针对该自流井问题, 分别采用 4 种方法进行计算, 相互对比。

(1) 解析法。采用定降深井的解析解(陈崇希和林敏, 1999):

$$Q = 2\pi T s_w G(t) \quad (20)$$

式(20)中  $s_w$  为自流井的降深(在本例中为 20 m),  $G(t)$  是定降深井的流量函数。

(2) 定水头单元法。把包含自流井的单元处理为定水头边界进行常规模拟, 流量应用式(4)求出。

(3) 定水头单元校正法。应用式(7)对方法(II)的结果进行校正。

(4) 本文校正模型。即先利用差分方程(16)模拟得到自流井单元的特征水头, 然后利用式(15)计算流量。

计算结果清楚的表明(图 3), 与解析解求出的自流量相对照, 定水头单元法的结果始终偏大很多, 定水头单元校正法的误差虽然有所减小, 但其结果又明显偏小。本文的校正模型则能够很好的与解析解吻合: 在参数组(a)条件下, 相对误差始终小于 5%; 在参数组(b)条件下, 0.4 d 之后的相对误差也

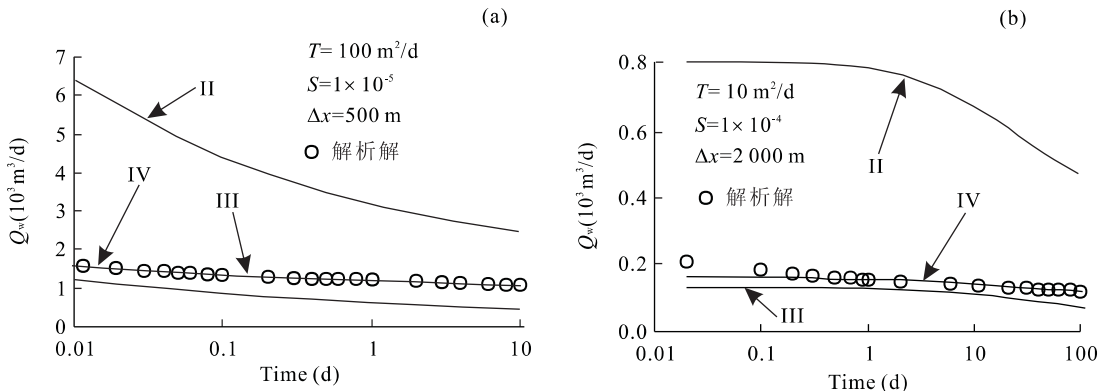


图 3 在参数组(a)和(b)条件下, 不同方法对自流井的流量模拟结果

Fig. 3 With parameter groups (a) and (b), the flow rate of flowing artesian well simulated by different methods

II. 定水头单元法; III. 定水头单元校正法; IV. 本文校正模型

始终小于 5%。考虑到参数组(b)所使用的网格单元宽度达到了 2 000 m,校正模型的精确度是令人满意的,也说明假设(3)没有带来显著的误差。

## 4 结论

常规有限差分法既不能准确的求出抽水井的井中水位,也不能准确的求出自流井的流量。现有地下水数值模拟中对自流井的若干处理方法都缺乏合理性。本文在考虑井周附近径向流的条件下,通过与解析解相结合,提出了矩形网格有限差分模拟的自流井校正模型,其中考虑了自流井周围含水层存储量的释放。能够用解析解对照的算例表明,即使用千米级大尺度网格,本校正模型也能够获得相当精确的自流井流量,绝大多数情况下相对误差小于 5%。

## References

- Chen, C. X., Lin, M., 1999. Groundwater hydraulics. China University of Geosciences Press, Wuhan (in Chinese).
- Chen, C. X., Tang, Z. H., 1990. Numerical methods on analysis of groundwater flow. China University of Geosciences Press, Wuhan, 60—61 (in Chinese).
- Fensham, R. J., Fairfax, R. J., 2003. Spring wetlands of the Great Artesian basin, Queensland, Australia. *Wetlands Ecology and Management*, 11: 343—362.
- Liu, S. A., Huang, Z. X., Chen, Y., et al., 1996. Formation and distribution of the groundwater in Cretaceous System of the Ordos basin. *Journal of Arid Land Resources and Environment*, 10(1): 3—14 (in Chinese with English abstract).
- McDonald, M. G., Harbaugh, A. W., 1988. A modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model. United States Government Printing Office, United States Geological Survey Techniques of Water Re-

sources Investigations 06—A1, Washington.

- Merritt, M. L., 1997. Computation of the time-varying flow rate from an artesian well in central Dade County, Florida, by analytical and numerical simulation methods. United States Government Printing Office, United States Geological Survey Water-Supply Paper 2491, Washington.
- Prickett, T. A., 1967. Designing pumping well characteristics into electrical analog models. *Ground Water*, 5(4): 38—46.
- Seidel, G. E., 1978. Hydraulic calibration of the GABHYD model of the Great Artesian basin. Bureau of Mineral Resources, Geology and Geophysics Record 1978/12, Canberra.
- Welsh, W. D., 2000. GABFLOW: A steady state groundwater flow model of the Great Artesian basin. Bureau of Rural Sciences, Canberra.
- Xiao, M. G., Chen, X. J., Liu, B. C., 2003. Hydrogeology parameter calculation in water gushing test of constant drawdown yield in infinite confined aquifer where gushing in the main hole is observed from several other holes. *Earth Science—Journal of China University of Geosciences*, 28(5): 575—578 (in Chinese with English abstract).

## 附中文参考文献

- 陈崇希,林敏,1999. 地下水动力学. 武汉:中国地质大学出版社.
- 陈崇希,唐仲华,1990. 地下水流动问题的数值方法. 武汉:中国地质大学出版社,60—61.
- 刘世安,黄忠信,陈延,等,1996. 鄂尔多斯盆地白垩系地下水形成分布规律. 干旱区资源与环境,10(1):3—14.
- 肖明贵,陈学军,刘宝臣,2003. 无限承压含水层中主孔涌水多孔观测定降深井流试验水文地质参数计算. 地球科学——中国地质大学学报,28(5):575—578.