

弹性波正演模拟中 PML 吸收边界条件的改进

秦 臻^{1,3}, 任培罡², 姚 姚¹, 张 才³

1. 中国地质大学地球物理与空间信息学院, 湖北武汉 430074

2. 中国地质大学资源学院, 湖北武汉 430074

3. 中国石油勘探开发研究院, 北京 100083

摘要: 在弹性波有限差分正演模拟中, 完全匹配层 (PML) 吸收边界条件是使用广泛、吸收效果最好的吸收边界条件。在目前的两种 PML 实现方法中, 分裂形式的完全匹配层 (SPML) 方法计算存储量大、编程实现复杂; 非分裂形式的完全匹配层 (NPML) 方法计算效率低、计算过程复杂。针对传统 PML 吸收边界条件在实现过程中存在的问题, 推导出了—种简洁有效的非卷积实现的 NPML 吸收边界条件, 既不需要对场分量进行分裂, 也不需要做复杂的卷积运算。分析结果表明, 本文实现的 NPML 吸收边界条件不仅具有良好的吸收衰减性能, 而且计算方程简单, 编程实现容易, 占有内存更小。

关键词: PML; 吸收边界条件; 弹性波; 正演模拟; 地球物理。

中图分类号: P631.4

文章编号: 1000-2383(2009)04-0658-07

收稿日期: 2008-08-28

Improvement of PML Absorbing Boundary Conditions in Elastic Wave Forward Modeling

QIN Zhen^{1,3}, Ren Pei-gang², YAO Yao¹, ZHANG Cai³

1. Institute of Geophysics & Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China

2. Faculty of Earth Resources, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China

3. Research Institute of Petroleum Exploration and Development, PetroChina, Beijing 100083, China

Abstract In finite-difference time-domain modeling of elastic waves, absorbing boundary conditions are used to mitigate undesired reflections from the model's truncation boundaries. The perfectly matched layer (PML) is generally acknowledged as the best available absorbing boundary condition and very efficient to absorb both body waves and surface waves. The classical splitting PML (SPML) has some disadvantages; it needs much computer memory and has complex programming process. And the conventional non-splitting PML (NPML) based on time convolution needs more auxiliary equations or fields and computing time. We have induced a simple and efficient NPML based on non-convolution technology in this paper. The NPML we induced does not have to split the velocity and stress fields and also doesn't need to involve in complex convolution in time domain. The analysis result shows the new PML method not only has perfect absorbing performance, but also has simple computing equations, easier programming and less memory consumption.

Key words: perfectly matched layer; absorbing boundaries; elastic wave; forward modeling; geophysics.

在有限区域的有限差分正演模拟中, 无论是求解麦克斯韦电磁波方程组, 还是求解弹性波动力学方程组, Bérenger (1994) 提出的完全匹配层 (perfectly matched layer, PML) 吸收边界条件是最有效的吸收边界条件。完全匹配层介质中的波动方程可以看作是常规的波动方程的推广, 波传播时相位改

变而振幅随指数衰减; 对于弹性介质参数相同而衰减系数不同的 PML, 波阻抗完全匹配, 理论上入射波无反射的传播, 模拟记录中的反射主要由数值离散引起。Chew and Weedon (1994) 引入复数伸展坐标系对 PML 吸收边界条件进行公式化; Rappaport (1995) 证明 PML 介质等价于在吸收边界区域

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 40274038)。

作者简介: 秦臻 (1978—), 男, 博士, 主要从事油气地球物理正反演研究, E-mail: qinzen1978@163.com

引入各向异性介质;大量实例(Chew and Weedon, 1994; Chen *et al.*, 1997) 表明, PML 吸收边界条件比指数衰减吸收边界条件(Marfurt, 1984; Shin, 1995)、廖氏吸收边界条件(Liao *et al.*, 1984)、Higdon 吸收边界条件(Higdon, 1991) 和旁轴近似吸收边界条件(Engquist and Majda, 1977) 等具有更优越的吸收性能。Chen *et al.* (1997) 和 Wang and Oristaglio (2000) 将 PML 吸收边界条件成功地应用到电磁波方程组的求解中。近年来, PML 吸收边界条件也被应用到声波和弹性波的有限差分正演模拟中(Liu and Tao, 1997; Wang and Oristaglio, 2000; Zeng *et al.*, 2001; Imhof, 2002)。另外, Teixeira and Chew (1999) 和 Chew and Liu (1996) 在柱坐标系中和球坐标系中实现了 PML 吸收边界条件。在国内, 研究者对 PML 吸收边界条件也做了一些讨论(方大纲和陈彬, 1996; 黄斌科等, 2003; 朱章虎等, 2006; 单启铜和乐友善, 2007; 王永刚等, 2007)。

目前, 已经发展了很多形式的 PML, 主要分为分裂形式 SPML (Splitting PML) 和未分裂形式 NPML (non-splitting PML)。SPML 通过分裂原始的场分量来实现, 是最初形式的 PML, 计算方程简洁。SPML 又可分为全局 SPML 和局部 SPML。全局 SPML 对模拟区域和吸收边界区域使用相同的 PML 波动方程, 实现起来简单, 缺点是存储量比常规的波动方程模拟大 2 倍(二维情形) 或 3 倍(三维情形); 局部 SPML 对模拟区域使用常规的波动方程, 而对吸收边界区域使用 PML 波动方程, 从而节省了大量的内存, 由于需要考虑众多不同的 PML 区域, 编程实现比较复杂。NPML 则不需对场分量分裂, 可以综合考虑 PML 区域而具有一定的优势, 主要有以下三种形式: 单轴 PML, 介质特性与频率有关, 计算过程较繁琐; 双轴 PML, 介质特性与频率无关, 一般应用于晶体中电磁波的传播截断; 卷积形式完全匹配层(CPML), 需要在时间域做大量卷积运算。NPML 计算方程复杂、计算量比较大, 而计算存储量和局部 SPML 差不多, 因此, 在绝大多数的波场正演模拟中, 还是采用 SPML。由于 SPML 和 NPML 是对复数伸展坐标系下 PML 波动方程的两种实现, 这两种方案对人工边界的反射具有相同的吸收效果。

本文通过在频率域引入辅助变量和辅助场方程, 将时间域 NPML 的卷积运算转化为易于实现的时间域的正常项和衰减项计算, 来简化 NPML 计算方程的实现, 降低编程复杂度, 减小 PML 辅助变量

所占内存。最后, 通过数值模拟来验证本文实现算法的正确性和有效性。

1 原理

1.1 PML 介质中的波动方程

由于在频率域中比在时间域中更能方便地讨论 PML 形式下的波动方程, 二维弹性介质中复数伸展坐标系下一阶应力—速度偏微分形式的波动方程可表示为:

$$\begin{cases} i\omega \tilde{V}_x = \frac{\partial \tilde{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}_{xz}}{\partial z}, \\ i\omega \tilde{V}_z = \frac{\partial \tilde{T}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}_{zz}}{\partial z}, \\ i\omega \tilde{T}_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z}, \\ i\omega \tilde{T}_{zz} = \lambda \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z}, \\ i\omega \tilde{T}_{xz} = \mu \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial z}. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\lambda = \rho(v_p^2 - 2v_s^2)$, $\mu = \rho v_s^2$, ρ , v_p , v_s 分别为介质密度、纵波速度和横波速度。而 \tilde{V}_x , \tilde{V}_z 为频率域中质点速度的水平分量和垂直分量, \tilde{T}_{xx} , \tilde{T}_{zz} , \tilde{T}_{xz} 分别对应频率域中水平正应力、垂直正应力和剪应力。

频率域的复数伸展坐标系定义为:

$$\tilde{p}(p) = \int_0^p s_p(p') dp', \quad (p = x, z), \quad (2)$$

其中伸展函数定义为:

$$s_p = 1 + \frac{\sigma_p}{i\omega}, \quad (p = x, z). \quad (3)$$

σ_p 为伸展坐标系下的衰减因子。式(2)对应的微分算子为:

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{s_p} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma_p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad (p = x, z). \quad (4)$$

通过式(4), 则式(1)的第 3 个方程可写作:

$$i\omega \tilde{T}_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{s_x} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \lambda \frac{1}{s_z} \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z}. \quad (5)$$

式(5)就是式(1)中第 3 个方程在伸展坐标系下的对应方程。通过引入伸展坐标系, 就可以比较方便地实现波动方程在介质中的衰减。

1.2 SPML 吸收边界条件

在弹性波动方程中, SPML 吸收边界条件的核心思想就是将质点的速度分量和应力分量沿坐标轴

方向进行分裂,

$$\tilde{V}_p = \tilde{V}_{px} + \tilde{V}_{pz}, (p = x, z), \tag{6}$$

$$\tilde{T}_{pp} = \tilde{T}_{ppx} + \tilde{T}_{ppz}, (p = x, z), \tag{7}$$

$$\tilde{T}_{xz} = \tilde{T}_{xzx} + \tilde{T}_{xzz}. \tag{8}$$

以式(1)中的第 3 个方程中 \tilde{T}_{xx} 场分量的分裂为例. 结合式(4)和式(7), 有:

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{T}_{xxx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{s_x} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x}, \\ i\omega \tilde{T}_{xxz} &= \lambda \frac{1}{s_z} \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{9}$$

将式(9)变换回时间域, 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xxx}}{\partial t} + \sigma_x T_{xxx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial T_{xxz}}{\partial t} + \sigma_z T_{xxz} &= \lambda \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{10}$$

当所有的衰减因子 σ 都为零时, SPML 波动方程与常规的波动方程等价. 因此, 基于分裂形式的 PML 波动方程有两种实现方案: 一是全局 SPML 算法, 在 PML 区域和模拟区域使用相同的分裂形式的 PML 波动方程; 二是局部 SPML 算法, 在 PML 区域使用分裂形式的 PML 波动方程而在模拟区域使用常规的波动方程. 整体 SPML 算法编程实现非常容易但是计算存储量太大; 局部 SPML 算法节省了大量的内存, 但是由于涉及到两套方程的耦合而使编程实现变得非常繁琐.

1.3 NPML 吸收边界条件

根据式(3), 频率域中伸展因子倒数的傅立叶变换为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_p(t)} &= \delta(t) - \sigma_p \exp(-\sigma_p t) = \delta(t) - \xi_p(t), \\ (p = x, z) \end{aligned} \tag{11}$$

结合式(5), 变换到时间域, 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_z}{\partial z} - (\lambda + 2\mu) \xi_x(t) \otimes \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} - \lambda \xi_z(t) \otimes \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{12}$$

其中: \otimes 为卷积符号. 式(12)为 NPML 方程的一般表达形式. 由于在时间域离散求解时涉及到每一迭代时间步都得求卷积运算, 而卷积运算的实现必须存储前面所有时刻的场分量, 计算存储量特别大, 相比于全局 SPML 算法不具备优势. Francis 使用递推积分来间接地来实现上面的卷积, 但是求解方程比较复杂, 相比于局部 SPML 算法不具备优势. 因此, 绝大多数地震波场正演模拟还是使用 SPML.

1.4 改进的 NPML 吸收边界条件

以上可以得出, 基于分裂形式的 SPML 和基于非分裂形式的 NPML, 要么需要很大的计算存储量, 要么实现起来非常复杂. 随着计算机运算能力的提高, 特别是并行算法和计算机集群的推广, 三维情形下的多炮地震波场正演模拟已经能比较容易实现. 但是, 由于三维复杂介质涉及到更多的波场变量, 因此对计算机的内存要求仍然很高. 为了大量节省计算存储量, 常规的 PML 算法实现起来非常复杂. 为了解决上述问题, 我们推导了一种新的算法. 对复伸展函数的倒数进行分解, 有:

$$\frac{1}{s_p} = 1 - \frac{\sigma_p}{i\omega + \sigma_p}, (p = x, z), \tag{13}$$

将上式代入到式(5), 有:

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{T}_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{i\omega + \sigma_x} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} \right) + \\ \lambda \left(\frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} - \frac{\sigma_z}{i\omega + \sigma_z} \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

为了使得上式能在时间域方便地求解, 引入中间辅助变量:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{xx} &= \frac{\sigma_x}{i\omega + \sigma_x} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x}, \\ \tilde{\Psi}_{zz} &= \frac{\sigma_z}{i\omega + \sigma_z} \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{15}$$

整理(15)式, 得:

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{\Psi}_{xx} + \sigma_x \tilde{\Psi}_{xx} &= \sigma_x \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x}, \\ i\omega \tilde{\Psi}_{zz} + \sigma_z \tilde{\Psi}_{zz} &= \sigma_z \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{16}$$

同时, 式(14)变为:

$$\begin{aligned} i\omega \tilde{T}_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} - \\ (\lambda + 2\mu) \tilde{\Psi}_{xx} - \lambda \tilde{\Psi}_{zz}. \end{aligned} \tag{17}$$

式(1)中的其他方程同理. 下面写出时间域 PML 介质中的波动方程:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \Omega_{xx} - \Omega_{xz}, \\ \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - \Omega_{zx} - \Omega_{zz}, \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_z}{\partial z} - (\lambda + 2\mu) \Psi_{xx} - \lambda \Psi_{zz}, \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial V_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z}{\partial z} - \lambda \Psi_{xx} - (\lambda + 2\mu) \Psi_{zz}, \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial V_x}{\partial z} - \mu \Psi_{zx} - \mu \Psi_{xz}. \end{cases} \tag{18}$$

其中: $\Omega_{xx}, \Omega_{xz}, \Omega_{zx}, \Omega_{zz}$ 和 $\Psi_{xx}, \Psi_{xz}, \Psi_{zx}, \Psi_{zz}$ 为引入的中间辅助变量, 它们对应的控制方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial t} + \sigma_x \Omega_{xx} = \sigma_x \frac{\partial T_{xx}}{\partial x}, & \frac{\partial \Omega_{xz}}{\partial t} + \sigma_x \Omega_{xz} = \sigma_x \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial t} + \sigma_x \Omega_{zx} = \sigma_x \frac{\partial T_{xz}}{\partial x}, & \frac{\partial \Omega_{zz}}{\partial t} + \sigma_z \Omega_{zz} = \sigma_z \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Psi_{xx}}{\partial t} + \sigma_x \Psi_{xx} = \sigma_x \frac{\partial V_x}{\partial x}, & \frac{\partial \Psi_{zz}}{\partial t} + \sigma_z \Psi_{zz} = \sigma_z \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Psi_{xz}}{\partial t} + \sigma_x \Psi_{xz} = \sigma_x \frac{\partial V_z}{\partial x}, & \frac{\partial \Psi_{zx}}{\partial t} + \sigma_z \Psi_{zx} = \sigma_z \frac{\partial V_x}{\partial z}. \end{cases} \quad (19)$$

联立式 (18) 和式 (19), 可得到 PML 波动方程问题的求解. 可见, 通过引入中间辅助变量, 频率域中 PML 形式下的波动方程右端项被分解为两部分: 正常项和衰减项. 由于是相加关系, 变换到时间域后仍然表现为正常项和衰减项的相加关系. 因此, 时间域的求解可以简单的通过两个步骤来实现: 先对包含 PML 区域的整个计算区域按常规的波动方程离散求解; 然后按坐标轴方向单独考虑 PML 区域, 从第一步骤所得结果中减去相关 PML 区域的衰减影响, 并更新该区域的辅助变量. 该方法不需要对应力一速度场分量进行分裂, 避免了分裂形式下的 PML 波动方程求解的复杂性或辅助变量的巨大存储; 也避免了非分裂形式的 PML 波动方程所涉及的时间域复杂卷积运算, 求解方程简单而且未作任何近似.

1.5 数值离散化求解

无论是 SPML 方程组, 还是本文的辅助场方程组, 都可以用相同形式的方程来表述:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \beta f = \gamma. \quad (20)$$

上式对应的解析解为:

$$f = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} \gamma. \quad (21)$$

写成离散形式, 有:

$$\begin{aligned} f[(n+1)\Delta t] &= -\frac{1}{\beta} e^{-\beta \Delta t} e^{-\beta n \Delta t} + \frac{1}{\beta} \gamma, \\ f[n\Delta t] &= -\frac{1}{\beta} e^{-\beta n \Delta t} + \frac{1}{\beta} \gamma. \end{aligned} \quad (22)$$

从而可得式 (20) 的数值离散迭代解法:

$$f[(n+1)\Delta t] = e^{-\beta \Delta t} f[n\Delta t] + \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \Delta t}) \gamma. \quad (23)$$

上式可以用来对 SPML 波动方程进行数值离散, 也可用来对本文方法中辅助变量控制方程进行数值离散. 以式 (1) 的第 3 个方程为例, 使用分解方法很容易得到时间域离散形式的迭代求解步骤:

$$\begin{cases} T_{xx}^{n+1} = T_{xx}^n + \Delta t (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x^{n+1/2}}{\partial x}, \\ \quad (T_{xx} \text{ 在 } x \text{ 方向全局区域更新}) \\ T_{xx}^{n+1} = T_{xx}^n - \Delta t (\lambda + 2\mu) \Psi_{xx}^n, \\ \quad (T_{xx} \text{ 在 } x \text{ 方向 PML 区域的衰减}) \\ \Psi_{xx}^{n+1} = b_x \Psi_{xx}^n + a_x \frac{\partial V_x^{n+1/2}}{\partial x}, \\ \quad (\Psi_{xx} \text{ 在 } x \text{ 方向 PML 区域的更新}) \\ T_{xz}^{n+1} = T_{xz}^n + \Delta \lambda \frac{\partial V_z^{n+1/2}}{\partial z}, \\ \quad (T_{xz} \text{ 在 } z \text{ 方向全局区域更新}) \\ T_{xz}^{n+1} = T_{xz}^n - \Delta \lambda \Psi_{xz}^n, \\ \quad (T_{xz} \text{ 在 } z \text{ 方向 PML 区域的衰减}) \\ \Psi_{xz}^{n+1} = b_z \Psi_{xz}^n + a_z \frac{\partial V_z^{n+1/2}}{\partial z}, \\ \quad (\Psi_{xz} \text{ 在 } z \text{ 方向 PML 区域的更新}) \end{cases} \quad (24)$$

其中, $b_p = \exp[-\sigma_p \Delta t]$, $a_p = 1 - b_p$, ($p = x, z$). PML 介质的引入并不影响空间求导运算, 差分算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$ 的离散可以采用精度较高的显式高阶有限差分、隐式有限差分或伪谱法等求解.

Collino and Tsoyka (2001) 使用多项式函数来设置衰减因子 σ :

$$\begin{aligned} \sigma_p^{\max} &= -\frac{3\nu}{2d} \ln(R), \\ \sigma_p(l) &= \sigma_p^{\max} \left[\frac{l}{d} \right]^m, \quad (p = x, z). \end{aligned} \quad (25)$$

其中: l ($0 \leq l \leq d$) 为某一 PML 层到 PML 区域内边界的距离; d 为该 PML 区域的厚度; m 为多项式的阶数, 一般取为 2 或 3; R 为理论反射系数, 一般设置为 0.001 ~ 0.000 01; ν 为 PML 区域的纵波速度. PML 区域一般设置为 4 ~ 10 层就可以达到很好的吸收效果.

2 分析与比较

表 1 将常规的几种 PML 吸收边界条件算法与本文的算法在计算存储量、计算效率和计算复杂度等方面从二维情形和三维情形做了对比 (NPML 采用的是 Francis 文中算法). 从需要的辅助变量来说, 整体考虑的非分裂形式的全局 SPML 法为零, 然后是本文方法, 其次是局部考虑的 SPML 法, 最后是非分裂形式卷积实现的 NPML 法. 从需要的计算存储量来说 (考虑了辅助变量所占的少量内存), 本文方法最小, 局部 SPML 法和 NPML 法次之, 全局

表 1 不同 PML 吸收边界条件方法比较

Table 1 Comparing of some kinds of PML absorbing boundary conditions

比较类型	2D				3D			
	局部 SPML	全局 SPML	卷积 NPML	本文	局部 SPML	全局 SPML	卷积 NPML	本文
场变量	9 个	5 个	10 个	5 个	5 个	9 个	24 个	9 个
辅助变量	10 个	无	16 个	8 个	24 个	无	36 个	18 个
吸面	无	不考虑	无	无	6	不考虑	6	6
收边	4	不考虑	4	4	12	不考虑	不考虑	不考虑
边界角	4	不考虑	不考虑	不考虑	8	不考虑	不考虑	不考虑
计算存储量	5 个二维数组	10 个二维数组	5 个二维数组	5 个二维数组	9 个三维数组	24 个三维数组	9 个三维数组	9 个三维数组

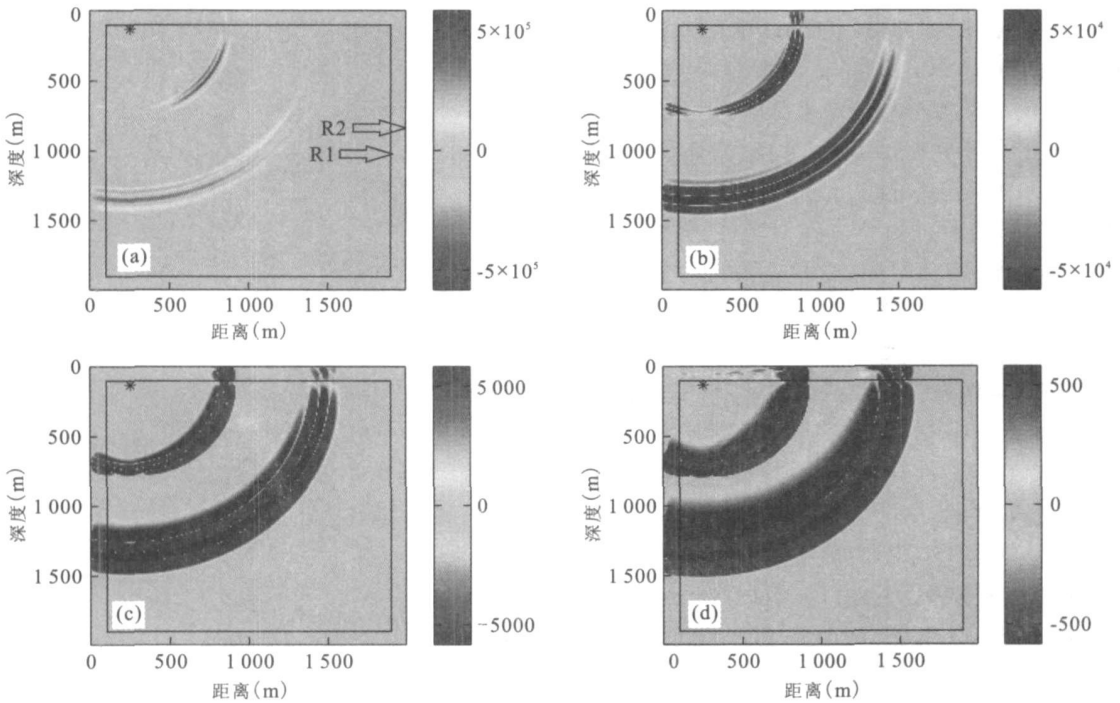


图 1 不同放大比例的波场快照 (0.42 s) 比较

Fig. 1 Comparing of some scaling for wave shot

a. 原始; b. 放大 10 倍; c. 放大 100 倍; d. 放大 1 000 倍

SPML 法最大. 从编程的难易程度来说, 整体 SPML 法最简单, 其次是本文方法, 然后是 NPML 法, 最后是局部 SPML 法. 从计算时间来说, 本文方法和 SPML 法要比 NPML 法少. 从吸收效果的好坏来说, 由于都是 PML 吸收边界条件, 吸收效果都很接近. 总的来说, 在二维情形下使用本文方法和全局 SPML 法是非常合适的(此时内存的影响很小), 三维情形下使用本文方法是最合适的.

为了验证本文算法的有效性, 设计了一个大小为 $2000\text{ m} \times 2000\text{ m}$ 的模型, 网格间距为 10 m , 密度为 2000 kg/m^3 , 纵波速度为 4000 m/s , 横波速度为 2000 m/s , 时间步长为 0.6 ms , 采用峰值频率为

25 Hz 的雷克子波. PML 区域的层数为 10 层. 将震源靠近 PML 区域边界放置, 水平方向和垂直方向的距离(距离 PML 区域内边界)分别为 150 m 和 20 m , 震源加载于质点速度的垂直分量上.

图 1 是 0.42 s 时刻的波场快照, 黑色的小实心点为震源所在位置, 矩形框 R1 和 R2 分别为 PML 介质的内边界和外边界, 两者之间的区域为吸收衰减区域, 矩形框 R1 包围区域为有效传播区域. 图 1a 为原始波场快照, 在有效传播区域中观察不到任何来自 R1 边界以外的反射. 为了更清楚地观察 PML 介质的吸收性能, 对原始波场快照分别放大 10 倍(图 1b)、100 倍(图 1c)和 1000 倍(图 1d). 除了放大

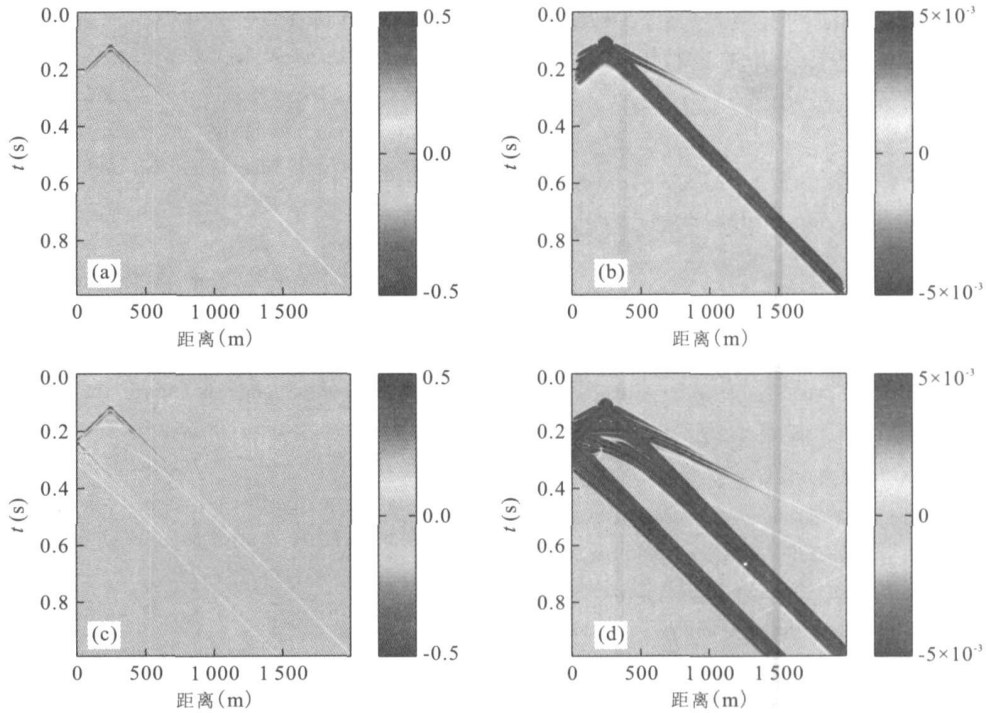


图2 使用和未使用 PML 介质时的地震记录比较

Fig. 2 Comparing for seismic record with or without using PML media

a. 使用 PML; b. 使用 PML 并放大 100 倍; c. 未使用 PML; d. 未使用 PML 放大 100 倍

1000 倍时,有效传播区域上边界出现来自吸收衰减区域非常微弱的反射外,放大 10 倍和放大 100 倍仍然观察不到任何来自吸收衰减区域的反射.波在吸收衰减区域的传播有些复杂,但是它对有效传播区域几乎不产生影响.

为了进一步观察 PML 介质的良好吸收衰减性能,图 2 对使用了 PML 介质(图 2a 和图 2b)和未使用 PML 介质(图 2c 和图 2d)接收的地震记录进行了比较,其中图 2b 和图 2d 是对原始地震记录放大了 100 倍时的情形.当使用了 PML 介质来对波进行吸收衰减后,无论是原始地震记录还是放大了 100 倍后的地震记录,都观察不到来自截断边界处的任何不期望反射.但是,如果不对来自截断边界处的反射波做任何处理,地震记录中将会出现大量强干扰的不期望的反射波.

3 结论

基于非分裂式 PML 波动方程的实现,提出了一种不通过卷积运算来实现 PML 吸收边界条件的新算法,来改善常规的 PML 吸收边界条件在数值离散实现时的一些不足.该算法不需要对弹性波正

演模拟中的应力—速度场进行分裂,与常规的全局 SPML 算法相比,避免了分裂的场分量占用大量内存;与常规的局部 SPML 算法相比,不需要考虑不同 PML 区域众多复杂情形;与常规的 NPML 算法相比,不用在时间域做大量卷积运算.

新的迭代求解算法仅在 PML 介质中把弹性波动方程分解为正常项和衰减项两部分,而在有效传播区域只包含正常项部分.离散实现的时候正常项和衰减项的更新是单独计算的,即正常项的更新将对包含 PML 介质的所有区域进行,衰减项的更新仅在 PML 介质区域进行.另外,提出了使用解析算法来离散实现 PML 控制方程(也可用于 SPML 介质中的波动方程),提高了 PML 介质中波动方程的离散精度.数值实验表明,PML 介质的确具有优良的吸收衰减性能,同时也说明了本文算法的正确性和有效性.

本文提出的 PML 吸收边界条件实现算法相对于以往算法,计算方程简单、编程实现更容易、PML 辅助变量所占内存更小,不但可用于二维情形的正演模拟,更适合解决三维情形中 PML 吸收边界条件实现时编程复杂和内存占用大的问题.因此,该方法完全可以替代常规的 PML 吸收边界条件实现算

法,不仅可以应用到地震波的有限差分正演模拟中,也可以用到电磁波的有限差分正演模拟中。

References

- Bérenger, J. P., 1994. A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114: 185–200.
- Chen, Y. H., Chew, W. C., Oristaglio, M. L., 1997. Application of perfectly matched layers to the transient modeling of subsurface EM problems. *Geophysics*, 62: 1730–1736.
- Chew, W. C., Liu, Q. H., 1996. Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, 4: 341–359.
- Chew, W. C., Weedon, W. H., 1994. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7: 599–604.
- Collino, F., Tsogka, C., 2001. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66: 294–307.
- Engquist, B., Majda, A., 1977. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31(9): 629–651.
- Fang, D. G., Chen, B., 1996. Recent progress in the research of perfectly matched layer. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 20(6): 572–576 (in Chinese with English abstract).
- Higdon, R. L., 1991. Absorbing boundary condition for elastic waves. *Geophysics*, 56: 231–241.
- Huang, B. K., Jiang, Y. S., Wang, W. B., 2003. A discussion on difference formulation in PML absorption boundary condition. *Journal of Microwaves*, 19(4): 1–4 (in Chinese with English abstract).
- Imhof, M. G., 2002. Calculating the seismic effect of 3D underground structures and topography with the finite-difference method. 72nd Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1939–1942.
- Liao, Z. P., Wong, H. L., Yang, B. P., et al., 1984. A transmitting boundary for transient wave analysis. *Scientia Sinica*, 27(10): 1063–1076.
- Liu, Q. H., Tao, J. P., 1997. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102: 2072–2082.
- Marfurt, K. J., 1984. Accuracy of finite-difference and finite-

element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, 49: 533–549.

- Rappaport, C. M., 1995. Perfectly matched absorbing boundary conditions based on anisotropic lossy mapping of space. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 5: 90–92.
- Shan, Q. T., Yue, Y. X., 2007. Wavefield simulation of 2D viscoelastic medium in perfectly matched layer boundary. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 46(2): 126–130 (in Chinese with English abstract).
- Shin, C., 1995. Sponge boundary condition for frequency-domain modeling. *Geophysics*, 60: 1870–1874.
- Teixeira, F. L., Chew, W. C., 1999. On causality and dynamic stability of perfectly matched layers for FDTD simulations. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 47: 775–785.
- Wang, T., Oristaglio, M. L., 2000. 3D simulation of GPR surveys over pipes in dispersive soils. *Geophysics*, 65: 1560–1568.
- Wang, Y. G., Xing, W. J., Xie, W. X., et al., 2007. Study absorbing boundary condition by perfectly matched layer. *Journal of China University of Petroleum*, 31(1): 19–24 (in Chinese with English abstract).
- Zeng, Y., He, J., Liu, Q. H., 2001. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 66: 1258–1266.
- Zhu, Z. H., Lu, W. Z., Feng, K. S., 2006. The simplification of PML application and programming realization in FDTD calculation. *Journal of Air Force Engineering University (Nature Science Edition)*, 7(2): 55–57 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献

- 方大纲, 陈彬, 1996. 完全匹配层(PML)的研究进展. 南京理工大学学报, 20(6): 572–576.
- 黄斌科, 蒋延生, 汪文秉, 2003. 关于完全匹配层吸收边界条件中差分格式的讨论. 微波学报, 19(4): 1–4.
- 单启铜, 乐友喜, 2007. PML 边界条件下二维粘弹性介质波场模拟. 石油物探, 46(2): 126–130.
- 王永刚, 邢文军, 谢万学, 等, 2007. 完全匹配层吸收边界条件的研究. 中国石油大学学报(自然科学版), 31(1): 19–24.
- 朱章虎, 卢万铮, 冯奎胜, 2006. FDTD 计算中 PML 的简化应用及编程实现. 空军工程大学学报(自然科学版), 7(2): 55–57.