

doi:10.3799/dqkx.2016.101

重磁数据稳定向下延拓的水平导数迭代法

马国庆, 明彦伯, 贺 杨, 王丽华, 李丽丽

吉林大学地球探测科学与技术学院, 吉林长春 130026

摘要: 向下延拓是重磁数据处理的常用手段, 能有效地区分叠加异常、增强浅部异常, 但现有向下延拓算法的计算大多是不稳定的, 且易受噪声的干扰, 往往造成异常形态的畸变。提出一种基于水平导数和向上延拓联合迭代的向下延拓算法, 由于向上延拓和水平导数的计算是稳定的, 因此该向下延拓方法可有效地增强结果的准确性和稳定性。理论模型试验表明该方法的向下延拓结果比 Fourier 变换计算结果更加稳定、准确, 且受噪音干扰小。将该方法应用于实际数据的处理, 结果显示该方法能稳定和准确地完成异常的向下延拓任务, 且有效地增强了浅部局部异常。

关键词: 重磁; 水平导数; 向下延拓; 迭代; 地球物理。

中图分类号: P3

文章编号: 1000-2383(2016)07-1231-07

收稿日期: 2015-09-25

Horizontal Derivative Iteration Method for Downward Continuation of Gravity and Magnetic Data

Ma Guoqing, Ming Yanbo, He Yang, Wang Lihua, Li Lili

College of Geo-Exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China

Abstract: Downward continuation is an effective tool in the processing of potential field data, which can identify overlap anomalies and enhance weak anomalies effectively. But the existing computation methods of downward continuation easily distort the true feature of potential field data since they are unstable and sensitive to noise. In this paper, we present an iteration method based on horizontal derivative, and we prove that downward continuation can be computed by the combination of upward continuation and horizontal derivative, and the computation of upward continuation and horizontal derivative is stable, which confirms stability and reliability of the method. The proposed method has been tested on synthetic potential field data, and it is found that the output results are more stable and accurate than those computed by the Fourier transform, and more insensitive to noise. Its application to real potential field data shows the same results and it really enhances the local anomalies.

Key words: gravity and magnetic; horizontal derivative; downward continuation; iteration; geophysics.

0 引言

向下延拓运算被广泛地应用于重磁数据的处理, 其能有效地突出浅部异常, 区分叠加异常 (Blakely, 1995; 王国灿等, 2015; 郁建等, 2015)。常规向下延拓操作对于噪声比较敏感, 延拓结果存在剧烈的跳动, 因此在对数据进行向下延拓的同时需

对数据进行严格地滤波。Baranov(1975)推导出位场异常向下延拓的空间域方法, 但该方法的延拓高度依赖于原始数据的测量点距, 且仅适用于较小距离的向下延拓 (Xu *et al.*, 2007)。后来人们推导出利用 Fourier 变换进行异常向下延拓的计算方法 (Pawłowski, 1995), 该方法应用较为广泛, 计算速度快, 但其易受噪声的干扰。为此人们提出很多方法

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目 (No.41404089); 国家自然科学基金重点项目 (No.41430322); 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) 资助项目 (No.2015CB45300); 中国博士后基金特别资助项目 (No.2015T80302); 中国博士后基金项目 (No.2014M550173); 东部盆地重点区带重磁电资料处理解释及有利勘探领域优选项目 (No.JLYT-WTY-2015-DYLY-003); 吉林大学兴城教学基地培育建设研究项目 (No.PB2015018); 吉林大学大学生创新创业训练计划项目 (No.2015620839)。

作者简介: 马国庆 (1984—), 男, 副教授, 博士, 主要从事位场数据处理及解释方面的研究。E-mail: maguoqing@jlu.edu.cn

引用格式: 马国庆, 明彦伯, 贺杨, 等, 2016. 重磁数据稳定向下延拓的水平导数迭代法. 地球科学, 41(7): 1231-1237.

来提高向下延拓的稳定性.Fedi and Florio(2002, 2011)提出归一化二阶垂直导数(integrated second vertical derivative,简称 ISVD)法,但由于展开式项数的约束会造成延拓结果的精度较低.Trompat *et al.*(2003)在向下延拓过程中加入维纳滤波器,有效地提高了延拓结果的稳定性.Cooper(2004)系统地对比了不同向下延拓方法的延拓效果.徐世浙(2006)提出位场数据延拓的积分迭代法,能有效地完成较大深度的延拓.为了提高计算效率,很多学者(刘东甲等,2009;张辉等,2009;曾小牛等,2011;高玉文等,2012;Ma *et al.*,2013;Zeng *et al.*,2013;Zhang *et al.*,2013)又提出了其他相关改进迭代法.Pasteka *et al.*(2012)和 Abedi *et al.*(2013)采用正则化方法进行异常的向下延拓操作,有效地提高了延拓结果的稳定性,也有学者从滤波的角度来增强向下延拓工作的稳定性.

本文提出一种数据向下延拓的水平导数迭代法,有效地增强了计算结果的稳定性和准确性.通过泰勒级数展开式证明了向下延拓计算可通过向上延拓和水平导数之和来完成,向上延拓和水平导数的计算是稳定的,受噪声影响较小,且通过迭代的方式来获得更加准确的结果.

1 方法基本原理

不同高度观测面上重磁异常之间的关系式为:

$$T(x,y,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T_0(x',y',0)h}{[(x-x')^2+(y-y')^2+h^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',\tag{1}$$

其中, $T_0(x',y',0)$ 和 $T(x,y,h)$ 表示高差为 h 的两个观测面上的异常,当 $h>0$ 时表示向上延拓,当 $h<0$ 时表示向下延拓.

对式(1)进行 Fourier 变换可得到:

$$T(x,y,h)=F^{-1}\left[e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}h}\tilde{T}(k_x,k_y)\right],\tag{2}$$

其中, $\tilde{T}(k_x,k_y)$ 表示异常 $T_0(x,y,0)$ 的 Fourier 谱, (k_x,k_y) 是分别表示 x 和 y 方向上的波数, $e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}h}$ 称为延拓因子.

向上延拓可有效地压制浅部干扰异常,使异常更加圆滑.向下延拓操作可有效地区分叠加异常,并突出局部异常,但向下延拓计算是不稳定的,且会增大噪声的干扰,使曲线发生强烈地跳动.

为了获得更加稳定向下延拓结果,笔者考虑采

用向上延拓和导数相结合的方式来完成这一任务.利用泰勒展开式计算深度为 h 界面上的异常表达式为:

$$T(x,y,h)=T(x,y,0)+\frac{\partial T}{\partial z}h+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}h^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial z^3}h^3+\cdots+\frac{1}{m!}\frac{\partial^m T}{\partial z^m}h^m,\tag{3}$$

其中, $T(x,y,h)$ 是观测面 h 上的异常, h 为延拓高度, $T(x,y,0)$ 是观测面上异常.向上延拓运算的泰勒展开式可表示为:

$$T(x,y,-h)=T(x,y,0)-\frac{\partial T}{\partial z}h+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}h^2-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 T}{\partial z^3}h^3+\cdots+\frac{1}{m!}\frac{\partial^m T}{\partial z^m}(-h)^m,\tag{4}$$

其中, $T(x,y,-h)$ 为观测面 $-h$ 上的异常.该方法是通过垂直导数来进行向上和向下延拓操作,但垂直导数的计算会明显增大噪声的干扰.将式(3)和式(4)相加后可得:

$$T(x,y,h)=2T(x,y,0)-T(x,y,-h)+\frac{\partial^2 T(x,y,0)}{\partial z^2}h^2+\frac{2}{4!}\frac{\partial^4 T(x,y,0)}{\partial z^4}h^4+\cdots+\frac{2}{2l!}\frac{\partial^{2l} T(x,y,0)}{\partial z^{2l}}h^{2l}.\tag{5}$$

通过以上变换后可以得到向下延拓运算可通过向上延拓和垂直导数计算来完成,垂直导数幅值随导数阶次增加而减小,选取四阶导数来完成向下延拓运算,其变形后的公式为:

$$T(x,y,h)=2T(x,y,0)-T(x,y,-h)+\frac{\partial^2 T(x,y,0)}{\partial z^2}h^2+\frac{2}{4!}\frac{\partial^4 T(x,y,0)}{\partial z^4}h^4.\tag{6}$$

垂直导数的计算会增大噪声的干扰,为此采用 Laplace 方程来计算异常的二阶和四阶垂直导数:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).\tag{7}$$

水平导数是空间域中进行,不会增大噪声的影响.因此利用式(6)进行异常的向下延拓工作只需要计算异常的水平导数和向上延拓结果,可有效地增强向下延拓的稳定性.但由于该方法所保留有限的泰勒展开式的项数,因此会降低异常的精度.为了获得更加准确的结果,笔者给出一种迭代的方法来计算向下延拓结果.

笔者将利用式(6)计算得到的下界面异常 $T(x,y,h)$ 通过傅里叶变换向上延拓高度 h 得到异常 $T_1(x,y,0)$,由于向上延拓的精度较高,因此 $T(x,y,0)$ 与 $T_1(x,y,0)$ 应是相等的,但由于

$T(x,y,h)$ 仅是一个近似值,两者之间会存在一定的差距.通过下面的迭代过程来消除这一差距,计算观测面上原始异常 $T(x,y,0)$ 与 $T_1(x,y,0)$ 的差:

$$\Delta T_1(x,y,0) = T(x,y,0) - T_1(x,y,0). \quad (8)$$

利用式(6)将 $\Delta T_1(x,y,0)$ 向下延拓高度 h ,可以得到:

$$\Delta T_1(x,y,h) = 2\Delta T_1(x,y,0) - \Delta T_1(x,y,-h) + \frac{\partial^2 \Delta T_1(x,y,0)}{\partial z^2} h^2 + \frac{2}{4!} \frac{\partial^4 \Delta T_1(x,y,0)}{\partial z^4} h^4, \quad (9)$$

其中, $\Delta T_1(x,y,h)$ 为异常 $\Delta T_1(x,y,0)$ 下延 h 后异常, $\Delta T_1(x,y,-h)$ 为异常 $\Delta T_1(x,y,0)$ 上延 h 后异常. $\Delta T_1(x,y,h)$ 作下界面异常的一个修正量,则下界面异常可改写为:

$$T_1(x,y,h) = T(x,y,h) + \Delta T_1(x,y,h). \quad (10)$$

重复式(8)~式(10)的计算过程,直至 $\Delta T_m(x,y,0)$ 的均方差小于给定值 ϵ , 因此下界面 h 上的最终异常为:

$$T_m(x,y,h) = T(x,y,h) + \Delta T_1(x,y,h) + \cdots + \Delta T_m(x,y,h). \quad (11)$$

本文方法是通过迭代的方式来获得高精度的重磁数据向下延拓结果,会存在较大的计算量,因此计算效率较低.

2 理论模型试验

为了试验方法的可行性,笔者将其应用于重力异常的向下延拓计算.图 1a 为埋深为 15 m 球体产生的重力异常,计算点距为 1 m.图 1b 为球体埋深为 12 m 时的重力异常,该异常为图 1a 异常向下延拓 3 m 的理论异常.

图 1c 为利用本文方法对 1a 中异常下延 3 m 后得到的异常,其与图 1b 所示异常的均方差为 1.2×10^{-5} mGal;图 1d 为 Fourier 变换对 1a 中异常下延 3 m 后异常,与图 1b 所示异常的均方差为 8.3×10^{-5} mGal,可以看出不同方法延拓后异常均与理论异常差距较小.图 1e 为球体埋深为 10 m 时引起的

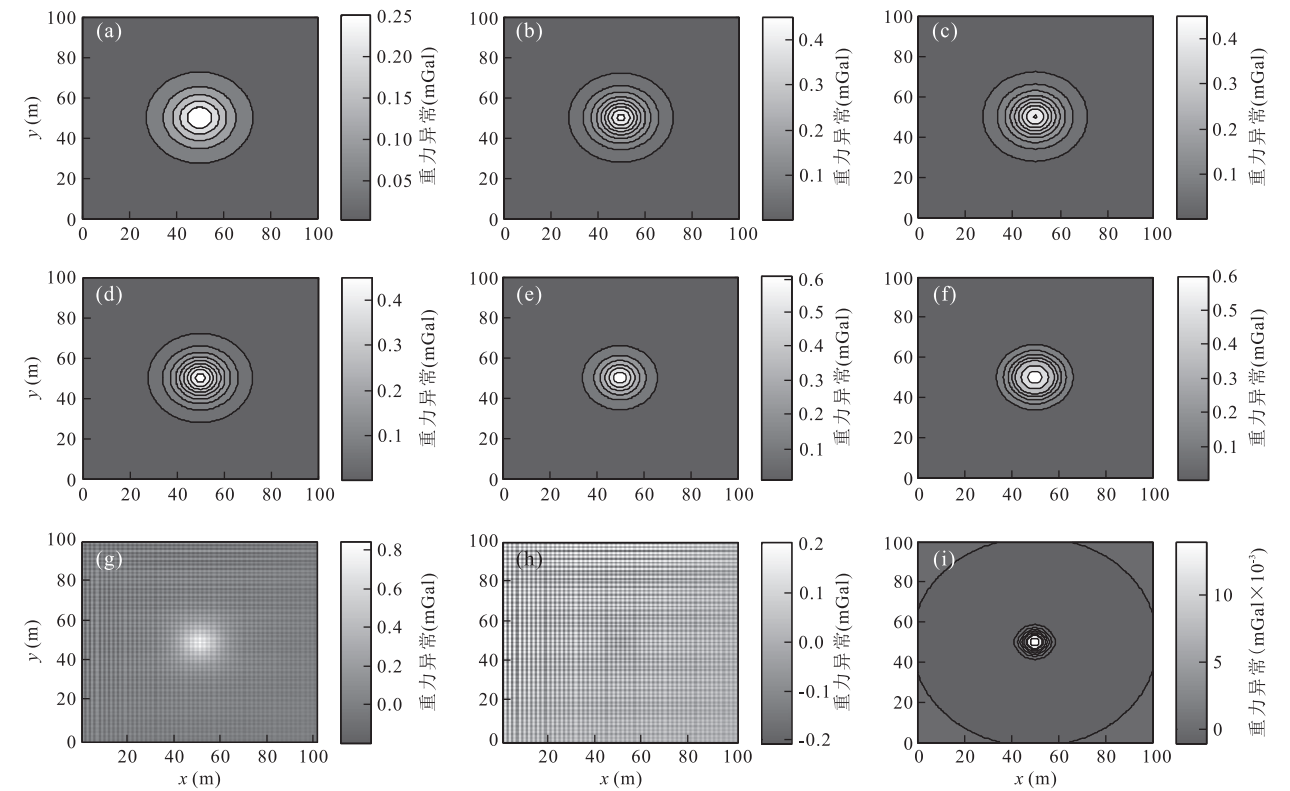


图 1 模型重力异常不同延拓方法应用效果

Fig.1 The application effect of different downward continuation methods of synthetic gravity anomaly

a.球体埋深为 15 m 时引起的重力异常;b.球体埋深为 12 m 时的异常;c.利用本文方法将 1a 中异常向下延拓 3 m;d.利用 Fourier 变换将 1a 中异常向下延拓 3 m;e.球体埋深为 10 m 时异常;f.利用本文方法将 1a 中异常向下延拓 5 m;g.利用 Fourier 变换将 1a 中异常向下延拓 5 m;h.图 1e 和 1g 异常的差;i.图 1e 和 1h 异常的差

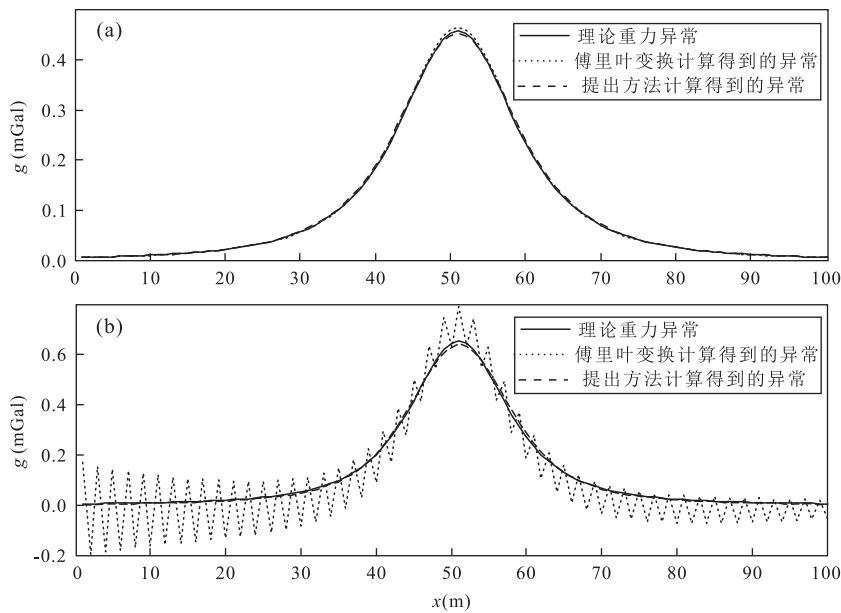


图 2 剖面重力异常不同延拓方法应用效果

Fig.2 The application effect of different downward continuation methods of profile gravity anomaly
a.不同方法向下延拓 3 m 后异常;b.不同方法向下延拓 5 m 后异常

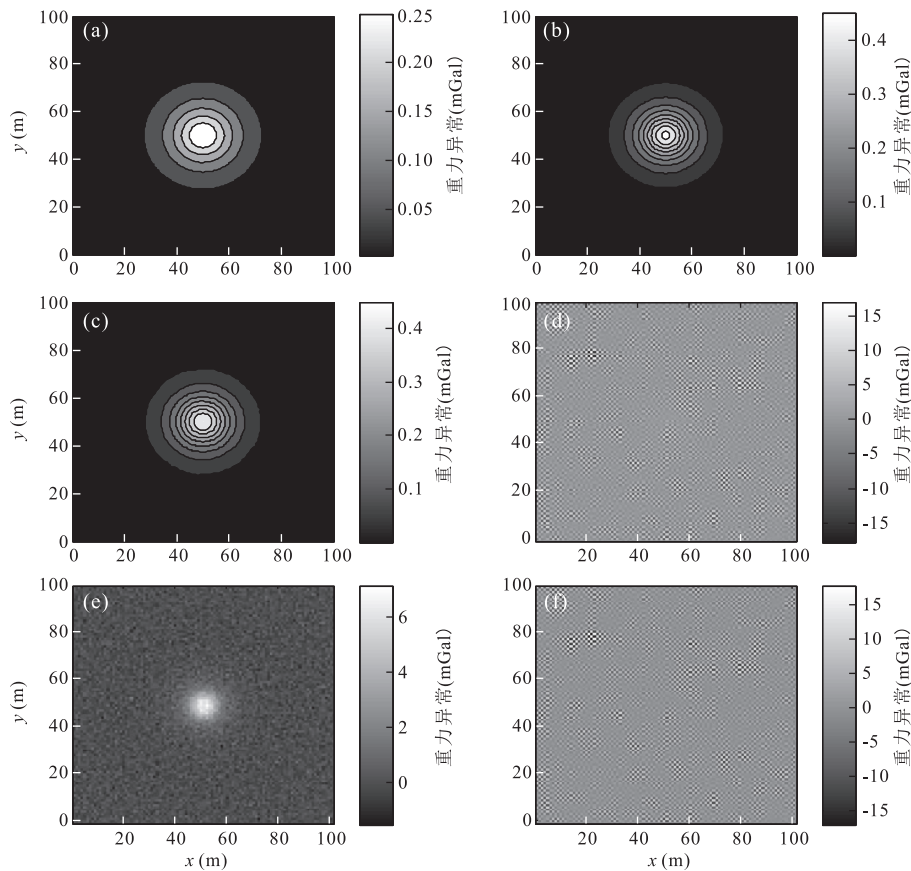


图 3 噪声重力异常不同延拓方法应用效果

Fig.3 The application effect of different downward continuation methods of noise-corrupted gravity anomaly
a.图 1a 所示异常中加入 5%的高斯噪声;b.图 1b 所示异常中加入 5%的高斯噪声;c.利用本文方法将 3a 中异常向下延拓 3 m;d.利用 Fourier 变换将 3a 中异常向下延拓 3 m;e.图 3b 和 3c 异常的差;f.图 3b 和 3d 异常的差

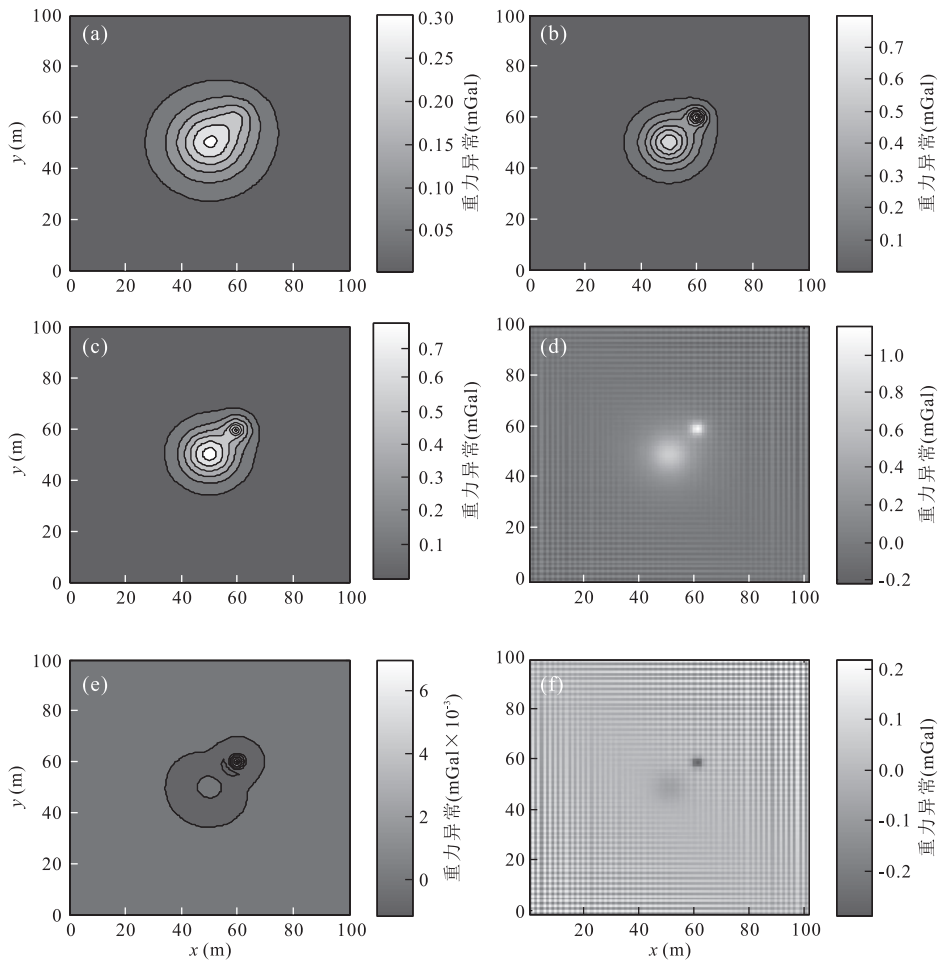


图 4 叠加重力异常不同延拓方法应用效果

Fig.4 The application effect of different downward continuation methods of synthetic gravity anomaly

a.埋深分别为 15 m 和 8 m 球体产生的重力异常;b.埋深分别为 10 m 和 3 m 球体产生的重力异常;c.利用本文方法将 4a 中异常向下延拓 5 m;
d.利用 Fourier 变换将 4a 中异常向下延拓 5 m;e.图 4b 和 4c 中异常的差;f.图 4b 和 4d 中异常的差

重力异常.图 1f 为利用本文方法将 1a 中异常下延 5 m 后得到的异常,图 1i 为图 1e 和图 1f 的差,其均方差为 42.0×10^{-5} mGal;图 1g 为 Fourier 变换对 1a 中异常下延 5 m 后异常,图 1h 为图 1e 和 1g 的差,均方差为 920.0×10^{-5} mGal.综上所述,随着延拓深度的加大,Fourier 变换计算结果出现剧烈地跳动,与理论异常之间的差距较大,而利用本文方法下延后异常仍与理论异常相接近.

为了更加清晰地显示不同方法下延后异常与理论异常的差距,本文选取一条重力异常剖面来对结果进行展示(图 2).

从图 2 中可以看出,当延拓距离较小时,两种方法均能准确地完成异常的向下延拓操作,随着延拓距离的增大,Fourier 变换计算结果出现剧烈的波动,且误差较大,而本文方法依旧能准确地完成异常的向下延拓工作,稳定性较高.

噪声是影响延拓结果稳定性的关键因素,且在实际数据处理中是不可避免的.图 3a 为在图 1a 异常中加入 5% 高斯噪声后异常.图 3b 为在图 1b 异常中加入 5% 高斯噪声后异常.图 3c 为利用本文方法对 3a 所示异常下延 3 m 后得到的异常,其与图 3b 所示异常的差如图 3e 所示,其均方差为 34.2×10^{-5} mGal.图 3d 为利用 Fourier 变换对 3a 所示异常下延 3 m 后得到的异常,与图 3b 所示异常的差如图 3f 所示,其均方差为 $212\,800.0 \times 10^{-5}$ mGal.

从计算结果中可以看出,本文方法在存在噪声的情况依旧能准确地完成异常的向下延拓工作,受噪音影响较小,极大地提高了向下延拓工作的稳定性.

试验一下本文方法在较为复杂情况下的应用效果.图 4a 为埋深分别为 15 m 和 8 m 球体产生的重力异常.图 4b 为埋深分别为 10 m 和 3 m 球体产生的重力异常.笔者分别利用本文方法和 Fourier 变换

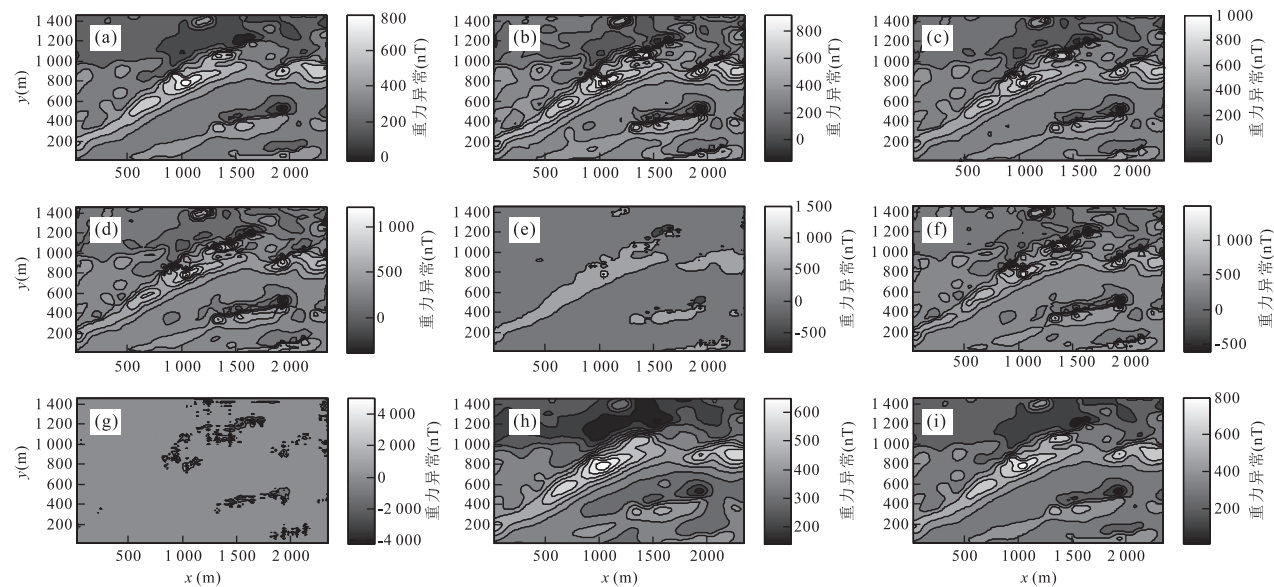


图 5 实测重力异常不同延拓方法应用效果

Fig.5 The application effect of different downward continuation methods of measured gravity anomaly

a.朱日和地区磁异常;b.本文方法下延 10 m 后异常;c.Fourier 变换下延 10 m 后异常;d.本文方法下延 20 m 后异常;e.Fourier 变换下延 20 m 后异常;f.本文方法下延 30 m 后异常;g.Fourier 变换下延 30 m 后异常;h.图 5g 所示异常上延 30 m 后异常;i.图 5f 所示异常上延 30 m 后异常

法将图 4a 所示异常向下延拓 5 m.图 4c 为本文方法延拓后异常,图 4d 为 Fourier 变换法延拓后异常.图 4e 为图 4b 和 4c 的差,其均方差为 $120.0 \times 10^{-5} \text{ mGal}$.图 4f 为图 4b 和 4d 的差,其均方差为 $5\,100.0 \times 10^{-5} \text{ mGal}$.

从计算结果中可以看出,Fourier 变换计算结果是不稳定的,且与理论值之间差距较大,而本文方法依旧能稳定和准确地完成异常的向下延拓工作.

3 实际数据应用

为了试验本文方法的实用性,笔者将其应用于朱日和地区磁力异常的向下延拓工作.图 5a 为内蒙古朱日和地区实测地面磁异常,测量点距为 20 m.图 5b 为利用本文方法下延 10 m 后异常,图 5c 为利用 Fourier 变换下延 10 m 后异常,可以看出这两种方法在该情况下均能较好地完成异常的向下延拓工作.

图 5d 为利用本文方法下延 20 m 后异常,图 5e 为利用 Fourier 变换下延 20 m 后异常.从结果中可以看出,本文提出的方法依旧能获得较稳定的结果,而 Fourier 变换获得的异常已经无法描述异常的形态特征.图 5f 为利用本文方法下延 30 m 后异常,图 5g 为利用 Fourier 变换下延 30 m 后异常.图 5h 为图 5g 所示异常上延 30 m 后异常,相对于图 5a 所示异常丢失了部分细节特征,且幅值也发生了一定的

变化.图 5i 为图 5f 所示异常上延 30 m 后异常,其与原始异常的差距较小.通过实际数据应用可以看出,对于较小距离的向下延拓本文提出的方法和 Fourier 变换均能获得准确的结果,但随着延拓距离的增大,Fourier 变换计算结果已经无法表征异常的形态特征,而本文方法依旧能准确和稳定地进行异常的向下延拓操作,且上延后异常与原始异常相一致,未造成异常信息的损失.

4 结论

本文提出利用向上延拓和水平导数来完成异常的向下延拓操作,可有效地增强下延的稳定性和准确性.通过理论模型试验证明,在有无噪声的情况下本文方法均能稳定地完成异常的向下延拓操作,与理论值差距较小,且受噪声干扰较小.将其应用于实测重磁异常的延拓处理,有效地增强了异常之间的界限特征,并发现了更多的局部异常.

References

Abedi, M., Gholami, A., Norouzi, G. H., 2013. A Stabled Downward Continuation of Airborne Magnetic Data: A Case Study for Mineral Prospectively Mapping in Central Iran. *Computers & Geosciences*, 52: 269 – 280. doi: 10.1016/j.cageo.2012.11.006

- Baranov, W., 1975. Potential Fields and Their Transformations in Applied Geophysics. Gebruder Borntraeger, Berlin, 151.
- Blakely, R. J., 1995. Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications. Cambridge University Press, Cambridge.
- Cooper, G., 2004. The Stable Downward Continuation of Potential Field Data. *Exploration Geophysics*, 35(4): 260—265. doi:10.1071/EG04260
- Fedi, M., Florio, G., 2002. A Stable Downward Continuation by Using ISVD Method. *Geophys. J. Int.*, 151: 146—156. doi:10.1046/j.1365-246X.2002.01767.X
- Fedi, M., Florio, G., 2011. Normalized Downward Continuation of Potential Fields within the Quasi-Harmonic Region. *Geophysical Prospecting*, 59(6): 1087—1100. doi:10.1111/j.1365-2478.2011.01002.X
- Gao, Y. W., Luo, Y., Wen, W., 2012. The Compensation Method for Downward Continuation of Potential Field from Horizontal Plane and Its Application. *Chinese J. Geophys.*, 55(8): 2747—2756 (in Chinese with English abstract).
- Liu, D. J., Hong, T. Q., Jia, Z. H., et al., 2009. Wave Number Domain Iteration Method for Downward Continuation of Potential Fields and Its Convergence. *Chinese J. Geophys.*, 52(6): 1599—1605 (in Chinese with English abstract).
- Ma, G. Q., Liu, C., Huang, D. N., et al., 2013. A Stable Iterative Downward Continuation of Potential Field Data. *Journal of Applied Geophysics*, 98: 205—211. doi:10.1016/j.jappgeo.2013.08.018
- Pasteka, R., Karcol, R., Kusnirak, D., et al., 2012. REG-CONT: A Matlab Based Program for Stable Downward Continuation of Geophysical Potential Fields Using Tikhonov Regularization. *Computers & Geosciences*, 49: 278—289. doi:10.1016/j.cageo.2012.06.010
- Pawlowski, R. S., 1995. Preferential Continuation for Potential-Field Anomaly Enhancement. *Geophysics*, 60(2): 390—398. doi:10.1190/1.1443775
- Trompat, H., Boschetti, F., Hornby, P., 2003. Improved Downward Continuation of Potential Field Data. *Exploration Geophysics*, 34: 249—256. doi:10.1071/EG03249
- Wang, G. C., Xu, Y. X., Chen X. J., et al., 2015. Three-Dimensional Geological Mapping and Visualization of Complex Orogenic Belts. *Earth Science*, 40(3): 397—406 (in Chinese with English abstract).
- Xu, S. Z., 2006. The Integral-Iteration Method for the Continuation of Potential Fields. *Chinese J. Geophys.*, 49(4): 1176—1182 (in Chinese with English abstract).
- Xu, S. Z., Yang, J. Y., Yang, C., et al., 2007. The Iteration Method for Downward Continuation of a Potential Field from a Horizontal Plane. *Geophysical Prospecting*, 55(6): 883—889. doi:10.1111/j.1365-2478.2007.00634.X
- Yu, J. J., Wang, G. C., Xu, Y. X., et al., 2015. Constraining Deep Geological Structures in the Three-Dimensional Geological Mapping of Complicated Orogenic Belts: A Case Study from the Karamay Region, Western Junggar. *Earth Science*, 40(3): 407—418 (in Chinese with English abstract).
- Zeng, X. N., Li, X. H., Liu, D. Z., et al., 2011. Regularization Analysis of Integral Iteration Method and the Choice of Its Optimal Step-Length. *Chinese J. Geophys.*, 54(11): 2943—2950 (in Chinese with English abstract).
- Zeng, X. N., Li, X. H., Su, J., et al., 2013. An Adaptive Iterative Method for Downward Continuation of Potential-Field Data from a Horizontal Plane. *Geophysics*, 78(4): J43—J52. doi:10.1190/geo2012-0404.1
- Zhang, H., Chen, L. W., Ren, Z. X., et al., 2009. Analysis On Convergence of Iteration Method for Potential Fields Downward Continuation and Research on Robust Downward Continuation Method. *Chinese J. Geophys.*, 52(4): 1107—1113 (in Chinese with English abstract).
- Zhang, H. L., Ravat, D., Hu, X. Y., 2013. An Improved and Stable Downward Continuation of Potential Field Data: The Truncated Taylor Series Iterative Downward Continuation Method. *Geophysics*, 78(5): 75—86. doi:10.1190/geo2012-0463.1

附中文参考文献

- 高玉文, 骆遥, 文武, 2012. 补偿向下延拓方法研究及应用. *地球物理学报*, 55(8): 2747—2756.
- 刘东甲, 洪天求, 贾志海, 等, 2009. 位场向下延拓的波数域迭代法及其收敛性. *地球物理学报*, 52(6): 1599—1605.
- 王国灿, 徐义贤, 陈旭军, 等, 2015. 基于地表地质调查剖面网络基础上的复杂造山带三维地质调查与建模方法. *地球科学*, 40(3): 397—406.
- 徐世浙, 2006. 位场延拓的积分迭代法. *地球物理学报*, 49(4): 1176—1182.
- 郁军建, 王国灿, 徐义贤, 等, 2015. 复杂造山带地区三维地质填图中深部地质结构的约束方法——西准噶尔克拉玛依后山地区三维地质填图实践. *地球科学*, 40(3): 407—418.
- 曾小牛, 李夕海, 刘代志, 等, 2011. 积分迭代法的正则性分析及其最优步长的选择. *地球物理学报*, 54(11): 2943—2950.
- 张辉, 陈龙伟, 任治新, 等, 2009. 位场向下延拓迭代法收敛性分析及稳健向下延拓方法研究. *地球物理学报*, 52(4): 1107—1113.