

<https://doi.org/10.3799/dqkx.2020.389>



基于子域解析元素法的煤矿地下水流场模拟

任晓波^{1,2}, 武强^{1,2}, 吴瑞芳³, 刘守强^{1,2}

1. 中国矿业大学地球科学与测绘工程学院, 北京 100083
2. 国家煤矿水害防治工程技术研究中心, 北京 100083
3. 河北省煤田地质勘查院, 河北邢台 054000

摘要: 为了分析将子域解析元素法应用于煤矿地下水流场模拟的可行性, 并探究如何提高此方法的模拟精度, 首先推导出了强度非线性变化的高阶线汇的复势表达式, 分析了其流量势与流函数的空间分布特征, 在此基础上应用 python 语言构建了基于子域解析元素法的煤矿地下水流场模型并应用于求解某煤矿放水试验后水位分布问题。模拟结果显示, 模拟水位与观测孔水位偏差绝对值范围为 1.36~5.27 m, 模型外边界(实际定水头边界)上的水位接近实际值(900 m), 且通过模型外边界(实际隔水边界)的流量近似为零。对模拟原理及模拟结果的分析表明, 基于子域解析元素法的煤矿地下水流场模型在全域上满足质量守恒及达西流梯度场, 在全域内任意一点的水位可通过该点所处的子域所对应的流量势函数求得, 因此应用于子域解析元素法进行煤矿地下水流场模拟是可行的, 而且将代表模型边界的非线性强度线汇剖分为更短的长度可进一步提高模拟精度。

关键词: 子域解析元素法; 线汇; 非线性强度; 复势; python; 水文地质学。

中图分类号: P641.4

文章编号: 1000-2383(2021)08-3019-09

收稿日期: 2020-11-05

Simulation of Groundwater Flow Field of Coal Mine Based on Subdomain-Analytic Element Method

Ren Xiaobo^{1,2}, Wu Qiang^{1,2}, Wu Ruifang³, Liu Shouqiang^{1,2}

1. College of Geoscience and Surveying Engineering, China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China
2. National Engineering Research Center of Coal Mine Water Hazard Controlling, Beijing 100083, China
3. Coal Geological Survey Institute of Hebei Province, Xingtai 054000, China

Abstract: In order to analyze the feasibility of applying the subdomain-analytic element method to the simulation of coal mine groundwater flow field, and to explore how to improve the simulation accuracy of this method, complex potential expression of nonlinear density distribution high-order line-sink of analytic element method was derived independently here, and spatial distribution characteristics of values of discharge potential and stream function on line-sink were analyzed. On the basis of that, the flow field model of coal mine was constructed with python language based on subdomains-analytic element method which was used for solving a problem concerning the distribution of head in a coal mine after drainage test. According to the simulation results, the absolute value of the deviation between the simulated heads and the heads of the observation holes ranges from 1.36 m to 5.27 m, and the heads on the outer boundaries of the model (actual constant head boundaries) are close to the actual value (900 m), and the flow rates passing through the outer boundaries of the model (actual impermeable boundaries) approximate zero. The analysis of the simulation principle and simulation results show that the coal mine groundwater flow field model based on the subdomain-analytic element method satisfies the conservation of mass and the gradient field of Darcy flow in the whole area, and the head at any point in the whole area can be determined using the discharge potential function of the subdomain where the point is located in.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (Nos.41877186, 41602262); 国家重点研发计划项目 (No. 2017YFC0804104).

作者简介: 任晓波 (1981-), 男, 博士, 从事矿井水害方面的研究. ORCID: 0000-0003-1893-3485. E-mail: kcyk98x@163.com

引用格式: 任晓波, 武强, 吴瑞芳, 等, 2021. 基于子域解析元素法的煤矿地下水流场模拟. 地球科学, 46(8):3019-3027.

Therefore, it is feasible to apply the subdomain-analytic element method to simulate the groundwater flow field of coal mine; and the nonlinear density distribution line-sinks representing the model boundaries can be divided into shorter lengths to further improve the accuracy of the simulation.

Key words: subdomain-analytic element method; line-sink; nonlinear density distribution; complex potential; python; hydrogeology.

目前,煤矿地下水流场模拟主要采用有限差分法、有限元法、有限分析法等数值方法,同时研究的热点集中在如何提高模拟精度或计算效率,但是缺乏贴合煤矿防治水工作实际需要的数值方法. 本文探索将子域解析元素法用于煤矿地下水流场模拟的可行性,并在此基础上分析如何提高该法的模拟精度,以期用较小的成本探明煤矿水文地质条件并指明下一步可能进行的复杂模拟需要收集哪些含水层数据及需要重点模拟研究的区域,从而为制定煤矿防治水方案提供重要依据. 子域解析元素法(subdomain-analytic element method)(Fitts, 2010, 2012, 2018; Fitts *et al.*, 2015)的理论基础为解析元素法(analytic element method)(Strack, 1989, 2003, 2017a, 2017b, 2018; Haitjema, 1995; Steward, 2015; Toller and Strack, 2019),传统的解析元素法主要用于含水层参数掌握不全的区域地下水流场模拟,子域解析元素法与解析元素法不同之处是前者的模拟区存在外边界且依据含水层参数不同将整个模拟区划分为若干个子域,这些改变使得子域解析元素法适合进行局部地下水流场模拟. 子域解析元素法相较于有限差分、有限元,前者只对模拟区的边界进行剖分,模拟区内任意一点的水位可由该点所在的子域流量势(discharge potential)函数求得,可获得计算精度较高的解析解,有限分析法(Zhang *et al.*, 2016)虽可在某些条件下获得计算精度高的数值解但涉及的数学原理比较复杂;子域解析元素法采用线汇(line-sink)模拟子域(subdomain)间的内边界和子域的外边界,当模拟区边界条件发生变化或者需要调整计算精度时只需改变线汇的属性,因此该法比上述其他数值方法更具灵活性,但子域解析元素法生成的求解方程组稀疏性较低,随着求解问题复杂程度增加其计算效率会降低,因此其比较适用于求解中等复杂程度的地下水流场模拟问题(Fitts, 2012). Strack (1989, 2017b)推导出了常数强度(density distribution)和线性变化强度的线汇复势(complex potential)表达式,并分析了常数强度线汇的流量势及流函数(stream function)的空间分布特征. 本文推导出由标准多项式表

示的强度非线性变化的高阶线汇复势表达式,并分析此类线汇的流量势与流函数在水流场中的空间变化规律;然后用python语言编制求解包含非线性强度线汇的煤矿地下水流场模型的程序,并用其求解实际问题,最后分析模拟结果.

1 子域解析元素法原理

1.1 线汇的复势

本文中子域解析元素法的应用对象为基于Dupuit-Forchheimer假设的平面承压二维流,即垂向水力梯度为零. 用复平面表示流场平面,引入流量势 Φ 的概念:

$$\Phi = KHh, \quad (1)$$

式中, K 、 H 、 h 分别为承压含水层渗透系数、厚度、水位. 由式(1)及达西定律,均质各向同性含水层单宽流量向量($\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_y$)在 x 方向分量 \mathbf{Q}_x 可表示为:

$$\mathbf{Q}_x = q_x H = -K \frac{\partial h}{\partial x} H = -\frac{\partial(KHh)}{\partial x}, \quad (2)$$

式中的 q_x 为 x 方向的达西渗流速度,因此有:

$$\mathbf{Q}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (3)$$

同理可得 y 方向单宽流量:

$$\mathbf{Q}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (4)$$

水位在 Φ 求解后可通过式(1)求得. 对于二维稳定流,由流场的散度为零可得:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial(q_x H)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y H)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

即:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

式(6)即为均质各向同性承压含水层中无源汇项条

件下二维平面稳定流关于流量势 Φ 的控制方程,由该式有:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (KHh)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (KHh)}{\partial y^2} = KH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + KH \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

因此,在上述条件下式(6)与其对应的平面二维流控制方程等价. $\Phi(x, y)$ 在研究区范围内具有连续的二阶偏导数且满足拉普拉斯方程,因此 $\Phi(x, y)$ 为调和函数,根据复变函数理论,存在 $\Phi(x, y)$ 的共轭调和函数 $\Psi(x, y)$,使得复变函数 $\Omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$ 为研究区内的解析函数,且两条曲线 $\Phi(z) = \Phi(z_0)$ 与 $\Psi(z) = \Psi(z_0)$ 在 $z = z_0$ 正交(z_0 为研究区中任意一点, $\Omega'(z_0) \neq 0$),在子域解析元素法中 $\Psi(z)$ 表示流函数(stream function),因此 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 可分别表示稳定流网中的等水位线与流线, $\Omega(z)$ 为流场的复势. 二维单井稳定流复势可表示为:

$$\Omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_w) + C, \quad (8)$$

其中, z_w 为井心坐标, C 为常数,此井流复势沿某一直线段的奇异性柯西积分为:

$$\Omega = \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} \frac{\sigma_0}{2\pi} \ln(z - \delta) d\xi, \quad (9)$$

其中 L 为直线段长度, σ_0 为直线段上单位长度的井流量, δ 为直线段上某一点, $d\xi$ 为直线段上包含 δ 点的一小段长度. 通过如下变换将全局坐标系 $z = (x, y)$ 变换为局部坐标系 $Z = (X, Y)$:

$$Z = X + iY = \frac{z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)}, \quad \Delta = \Delta_1 + i\Delta_2 = \frac{\delta - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)}, \quad (10)$$

其中 z_1, z_2 分别为直线段的两个端点, $\Delta = (\Delta_1 + i\Delta_2)$ 为直线段上某一点 δ 在局部坐标系 $Z = (X, Y)$ 中的对应坐标,式(9)可变换为:

$$\Omega = \int_{-1}^1 \frac{\sigma}{2\pi} \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)(Z - \Delta)\right] \frac{1}{2} L d\Delta, \quad (11)$$

对式(11)进行积分运算可得:

$$\Omega = \frac{\sigma_0 L}{4\pi} \left\{ (Z + 1) \ln(Z + 1) - (Z - 1) \ln(Z - 1) + 2 \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)\right] - 2 \right\}, \quad (12)$$

式(12)便是 Strack(1989, 2017b)给出的强度 σ 为常数 σ_0 的线汇复势,同时也给出了强度 σ 线性变化的线汇复势:

$$\Omega = \frac{L}{16\pi} \left\{ -(\sigma_2 - \sigma_1) \left[(Z^2 - 1) \ln \frac{Z - 1}{Z + 1} + 2Z \right] + 2(\sigma_1 + \sigma_2) \left\{ (Z + 1) \ln(Z + 1) - (Z - 1) \ln(Z - 1) + 2 \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)\right] - 2 \right\} \right\}, \quad (13)$$

其中, σ_1, σ_2 分别为线汇两端点 z_1, z_2 处的线汇强度.

关于线汇强度 σ 表达式的标准多项式次数加一为线汇的阶数,高阶线汇可以更加灵活高效地模拟流场的边界(Strack, 1989, 2017b; Fitts, 2010). 现以四阶线汇为例,用标准多项式表示非线性变化的线汇强度为:

$$\sigma = \sigma_3 \Delta^3 + \sigma_2 \Delta^2 + \sigma_1 \Delta + \sigma_0, \quad (14)$$

将式(14)代入式(11),经过积分计算可得:

$$\Omega = \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_1 + \Omega_0 = \frac{\sigma_3 L}{16\pi} \left[(1 - Z^4) \ln \frac{Z - 1}{Z + 1} - 2Z^3 - \frac{2}{3} Z \right] + \frac{\sigma_2 L}{12\pi} \left\{ \ln(Z^2 - 1) + Z^3 \ln \frac{Z + 1}{Z - 1} - 2Z^2 - \frac{2}{3} + 2 \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)\right] \right\} - \frac{\sigma_1 L}{8\pi} \left[(Z^2 - 1) \ln \frac{Z - 1}{Z + 1} + 2Z \right] + \frac{\sigma_0 L}{4\pi} \left\{ (Z + 1) \ln(Z + 1) - (Z - 1) \ln(Z - 1) + 2 \ln\left[\frac{1}{2}(z_2 - z_1)\right] - 2 \right\}, \quad (15)$$

式(15)中的四项分别对应式(14)中四项所产生的复势.

1.2 流量势与流函数的空间分布特征

Strack(1989, 2017b)对式(12)的常数强度线汇复势进行变换后在 $\frac{1}{Z} = 0$ 处展开为泰勒级数:

$$\Omega = \frac{\sigma_0 L}{2\pi} \ln\left[z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right] + O\left(\frac{1}{Z^2}\right), Z \rightarrow \infty, \quad (16)$$

式(16)表明,在远离线汇的区域常数强度线汇对水流场的影响相当于井心在线汇中心,抽(注)水量为 $\sigma_0 L$ 的抽(注)水井产生的效应.

现对(14)式中线汇强度的三次方项、二次方项及一次方项所对应的复势分别进行变换后在 $\frac{1}{Z} = 0$

处展开为泰勒级数,可得:

$$\begin{aligned}\Omega_3 &= \frac{\sigma_3 L}{2\pi} \left(-\frac{1}{5Z} \right) + O\left(\frac{1}{Z^3}\right), Z \rightarrow \infty \\ \Omega_2 &= \frac{\frac{1}{3}\sigma_2 L}{2\pi} \ln \left[Z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right] + O\left(\frac{1}{Z^2}\right), Z \rightarrow \infty \\ \Omega_1 &= \frac{\sigma_1 L}{2\pi} \left(-\frac{1}{3Z} \right) + O\left(\frac{1}{Z^3}\right), Z \rightarrow \infty, \quad (17)\end{aligned}$$

综合式(16)、式(17)可得:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\left(\frac{\sigma_2}{3} + \sigma_0\right)L}{2\pi} \ln \left[z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right] - \\ &\frac{\left(\frac{1}{5}\sigma_3 + \frac{1}{3}\sigma_1\right)L}{2\pi} \frac{1}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right), Z \rightarrow \infty. \quad (18)\end{aligned}$$

由于局部坐标系 $Z=(X, Y)$ 的原点在线汇的中点上,因此在远离线汇的区域 $1/Z$ 趋近于零,也就是式(18)中第二项趋近于零,故式(14)中线汇强度的三次方项、一次方项产生的复势在远离线汇的区域对水流场的影响可以忽略不计,四阶非线性强度线汇在远离线汇的区域对水流场的影响相当于井心在线汇中心,抽(注)水量为 $\left(\frac{\sigma_2}{3} + \sigma_0\right)L$ 的抽(注)水井产生的效应。

Strack(1989, 2017b)取常数强度线汇复势 Ω_0 的实部得到线汇的流量势 Φ_0 :

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{\sigma_0 L}{4\pi} \left[-X \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + Y\theta + \ln|Z^2 - 1| + \right. \\ &\left. 2\ln \frac{L}{2} - 2 \right], \theta = \arg(Z-1) - \arg(Z+1), \quad (19)\end{aligned}$$

式(19)中只有 θ 在 $Y=0$ 时非单值,但 $Y=0$ 时 $Y\theta=0$,从而使得常数强度线汇的流量势在线汇两侧保持单值性,即 $\Phi_0^+ = \Phi_0^-$,流量势在跨越线汇时不发生改变.现分别取(15)式中 $\Omega_3, \Omega_2, \Omega_1, \Omega_0$ 的实部,可得:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\sigma_3 L}{16\pi} \left[(-X^4 - Y^4 + 6X^2 Y^2 + 1) \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| \right. \\ &\left. + 4XY(X^2 - Y^2)\theta - 2X \left(X^2 - 3Y^2 + \frac{1}{3} \right) \right] + \\ &\frac{\sigma_2 L}{12\pi} \left[\ln|Z^2 - 1| - (X^3 - 3XY^2) \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + \right. \\ &\left. Y(3X^2 - Y^2)\theta - 2(X^2 - Y^2) - \frac{2}{3} + 2\ln \frac{L}{2} \right] - \\ &\frac{\sigma_1 L}{8\pi} \left[(X^2 - Y^2 - 1) \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| - 2XY\theta + 2X \right] +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma_0 L}{4\pi} \left[-X \ln \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| + Y\theta + \ln|Z^2 - 1| + \right. \\ &\left. 2\ln \frac{L}{2} - 2 \right], \quad (20)\end{aligned}$$

式(20)中包含 θ 的项都含有 Y ,因此非线性强度高阶线汇流量势在跨越线汇时仍然不发生改变。

Strack(1989, 2017b)通过分析常数强度线汇复势的虚部即流函数 Ψ 在线汇所在 X 轴的 $Y=0$ 两侧的取值得出:

$$\begin{aligned}\Psi^+ - \Psi^- &= \sigma_0 L, -\infty < X < -1, Y = 0 \\ \Psi^+ - \Psi^- &= \frac{1}{2}\sigma_0 L(-X + 1), \\ &-1 \leq X \leq 1, Y = 0 \\ \Psi^+ - \Psi^- &= 0, X > 1, Y = 0 \\ Q_\gamma^+ - Q_\gamma^- &= \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial X} (\Psi^+ - \Psi^-) = -\sigma_0, -1 \leq \\ &X \leq 1, Y = 0, \quad (21)\end{aligned}$$

式中, $\Psi^+, \Psi^-, Q_\gamma^+, Q_\gamma^-$ 分别为从 $Y>0$ 方向和 $Y<0$ 方向趋向于 X 轴时线汇产生的流函数和单宽流量的值.可以看出,常数强度线汇产生的流函数值在其复势函数 Ω_0 的交割线上(从线汇的终点 z_2 开始穿过起点 z_1 沿 X 轴负半轴延伸至无限远)发生了改变,线汇两侧的改变值为关于 X 的线性函数,并且改变值沿 X 方向的导数与线汇强度 σ_0 成恒定比例,线汇起点 z_1 至负 X 轴无穷远处的改变值则为恒定值 $\sigma_0 L$.现考察非线性强度线汇复势的虚部流函数值的分布特征, $Y=0$ 时取式(15)的虚部:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\sigma_3 L}{16\pi} (1 - X^4)\theta + \frac{\sigma_2 L}{12\pi} (\theta_1 + \theta_2 - X^3\theta + 2\alpha) - \\ &\frac{\sigma_1 L}{8\pi} (X^2 - 1)\theta + \frac{\sigma_0 L}{4\pi} (-X\theta + \theta_1 + \theta_2 + 2\alpha), \quad (22)\end{aligned}$$

分别计算 X 轴两侧的流函数 Ψ 值,有:

$$\begin{aligned}\Psi^+ &= \frac{\sigma_2 L}{12\pi} (2\pi + 2\alpha) + \frac{\sigma_0 L}{4\pi} (2\pi + 2\alpha), -\infty < \\ &X < -1, Y = 0^+ \\ \Psi^- &= \frac{\sigma_2 L}{12\pi} (-2\pi + 2\alpha) + \frac{\sigma_0 L}{4\pi} (-2\pi + 2\alpha), \\ &-\infty < X < -1, Y = 0^- \\ \Psi^+ &= \frac{\sigma_3 L}{16\pi} (1 - X^4)\pi + \frac{\sigma_2 L}{12\pi} (\pi - X^3\pi + 2\alpha) - \\ &\frac{\sigma_1 L}{8\pi} (X^2 - 1)\pi + \frac{\sigma_0 L}{4\pi} (-X\pi + \pi + 2\alpha), -1 \leq \\ &X \leq 1, Y = 0^+\end{aligned}$$

$$\Psi^- = \frac{\sigma_3 L}{16\pi}(1 - X^4)(-\pi) + \frac{\sigma_2 L}{12\pi}(-\pi + X^3\pi + 2\alpha) - \frac{\sigma_1 L}{8\pi}(X^2 - 1)(-\pi) + \frac{\sigma_0 L}{4\pi}(X\pi - \pi + 2\alpha),$$

$$-1 \leq X \leq 1, Y = 0^-$$

$$\begin{cases} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{cases} = \left(\frac{\sigma_2 L}{6\pi} + \frac{\sigma_0 L}{2\pi} \right) \alpha, 1 < X < \infty, \begin{cases} Y = 0^+ \\ Y = 0^- \end{cases}, (23)$$

由式(23)有:

$$\Psi^+ - \Psi^- = \left(\frac{1}{3} \sigma_2 + \sigma_0 \right) L, -\infty < X < -1, Y = 0$$

$$\Psi^+ - \Psi^- = \frac{1}{8} \sigma_3 L(-X^4 + 1) + \frac{1}{6} \sigma_2 L(-X^3 + 1) + \frac{1}{4} \sigma_1 L(-X^2 + 1) + \frac{1}{2} \sigma_0 L(-X + 1), -1 \leq X \leq 1, Y = 0$$

$$\Psi^+ - \Psi^- = 0, X > 1, Y = 0$$

$$Q_\eta^+ - Q_\eta^- = \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial X} (\Psi^+ - \Psi^-) = -(\sigma_3 X^3 + \sigma_2 X^2 + \sigma_1 X + \sigma_0) = -\sigma, -1 \leq X \leq 1, Y = 0, (24)$$

由式(24)可知,非线性强度高阶线汇的流函数值在复势函数交割线两侧发生改变,改变值在线汇两侧为X的四次方函数,并且改变值沿X方向的导数与线汇的非线性强度σ成恒定比例,流函数改变值在线汇起点z₁至负X轴无穷远处为固定值((σ₂/3 + σ₀)L).

2 流场模型构建

2.1 模型方程组

将研究区依据含水层参数的不同划分为若干子域(蒋立群等,2020),用式(15)表示的四阶非线性强度线汇模拟子域的外边界及内边界(Fitts, 1997; Ranjram and Craig, 2018),各子域中任意一点的水位和流速只取决于该子域中及子域边界上的元素(线汇、抽(注)水井等),而与其他子域无关,通过设置相邻子域在公共边界上水位与法向流量的相等使得由各子域组成的研究区内部满足水流场控制方程(王旭升和万力,2011),研究区外边界条件(定水头和定法向流量边界)则在该边界所在的子域得以满足(Haitjema *et al.*, 2006; 陈崇希等, 2014).

模型中抽(注)水井在子域中任意一点z产生的复势表达式采用式(8)(Fitts, 2010).用于模拟子域内边界及外边界的线汇在子域中某点的复势表达式采用式(15)(Fitts, 2010).

假设研究区划分为n个子域、p个外边界、q个

内边界,则模型方程组中由第m个子域内外边界条件可生成的方程为:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{ml} \operatorname{Re} [\Omega_i(z_{msu})] + \sum_{j=1}^{mw} \operatorname{Re} \left[\frac{Q}{2\pi} \ln(z_{msu} - z_{mjw}) \right] \right\} / (K_m H_m) + h_{m0} = h_{ms}, (25)$$

$$\sum_{i=1}^{ml} \left\{ \operatorname{Im} [\Omega_i(z_{msv'}) - \Omega_i(z_{msv})] + \Delta Q_i \right\} + \sum_{j=1}^{mw} \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{Q_j}{2\pi} \ln(z_{msv'} - z_{mjw}) - \frac{Q_j}{2\pi} \ln(z_{msv} - z_{mjw}) \right] + \Delta Q_j \right\} = f_s, (26)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{ml} \operatorname{Re} [\Omega_i(z_{msu})] + \sum_{j=1}^{mw} \operatorname{Re} \left[\frac{Q}{2\pi} \ln(z_{msu} - z_{mjw}) \right] \right\} / (K_m H_m) + h_{m0} = \left\{ \sum_{i=1}^{m'l} \operatorname{Re} [\Omega_i(z_{msu})] + \sum_{j=1}^{m'w} \operatorname{Re} \left[\frac{Q}{2\pi} \ln(z_{msu} - z_{m'jw}) \right] \right\} / (K_{m'} H_{m'}) + h_{m'0}, (27)$$

$$\sum_{i=1}^{ml} \left\{ \operatorname{Im} [\Omega_i(z_{msv'}) - \Omega_i(z_{msv})] + \Delta Q_i \right\} + \sum_{j=1}^{mw} \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{Q_j}{2\pi} \ln(z_{msv'} - z_{mjw}) - \frac{Q_j}{2\pi} \ln(z_{msv} - z_{mjw}) \right] + \Delta Q_j \right\} = \sum_{i=1}^{m'l} \left\{ \operatorname{Im} [\Omega_i(z_{msv'}) - \Omega_i(z_{msv})] + \Delta Q_i \right\} + \sum_{j=1}^{m'w} \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{Q_j}{2\pi} \ln(z_{msv'} - z_{m'jw}) - \frac{Q_j}{2\pi} \ln(z_{msv} - z_{m'jw}) \right] + \Delta Q_j \right\}, (28)$$

式(25)~(28)中,Ω_i为子域中第i个线汇的复势函数,ml、mw分别为第m个子域中线汇和抽(注)水井数量,m'l、m'w分别为第m'个子域中线汇和抽(注)水井数量,K_m、H_m、h_{m0}分别为第m个子域的渗透系数、含水层厚度、初始水位,K_{m'}、H_{m'}、h_{m'0}分别为第m'个子域的渗透系数、含水层厚度、初始水位,z_{msv'}与z_{m'jw}分别为第m个子域和第m'个子域中第j个抽(注)水井的井心,z_{msu}、z_{msv}、z_{msv'}分别为第m个子域中第s个线汇上分布的控制点和由线汇上的两点(z_{msv}与z_{msv'})构成的直线段,ΔQ_i、ΔQ_j分别为直线段z_{msv}z_{msv'}穿过线汇或井复势函数的交割线时需要校正的流量;式(25)是关于第m个子域中第s个线汇(定

水头外边界,水位为 h_{ms} 上的控制点 z_{msu} 水位的等式,式(26)是关于通过第 m 个子域中第 s 个线汇(定流量外边界,法向流量为 f_s)上的直线段 $z_{msv}z_{msu}$ 法向流量的等式,类似地,式(27)和式(28)分别为关于公共内边界(第 m 个子域与第 m' 个子域共有边界)上控制点水位和通过直线段流量的等式,每个线汇上设置 4 个控制点和 4 段连续的直线段正好可以求解每个四阶非线性强度线汇的 4 个未知强度参数,因此, n 个子域、 p 个外边界、 q 个内边界总共可以形成包含 $4 \times (p+q)$ 个方程、 $4 \times (p+q)$ 个线汇未知强度参数的模型方程组。

2.2 python 求解程序

面向对象的动态编程语言 python 中的类(class),利用其继承性和多态性可以比较理想地实现对水流场中各元素的模拟,而利用 python 的第三方模块如 Numpy、Scipy、Matplotlib 等可以进行高效的科学计算和成图(Bakker and Kelson, 2009; Bakker, 2014);且 python 程序开源可以对模型的整个模拟过程进行追溯,实现了模拟计算的透明化,便于第三方进行模型重现和验证(Fienen and Bakker, 2016; Bakker, 2019)。

上述模型用 python 及其第三方模块进行构建和求解,将代表子域内外边界的线汇剖分为较短的长度,可以提高模拟精度,该 python 程序具有根据模拟精度要求自动剖分线汇至指定长度的功能;若是研究区域的边界条件发生改变,直接编辑模型中的边界线汇属性即可更新边界条件,这些特征使得子域解析元素法较有限差分、有限元等方法在调整模拟精度和改变边界条件时具有更大的灵活度和更高的效率。此外,下文实例中的模型计算结果成图也由 python 程序实现。

3 实例应用

华北煤田某矿井 1 号煤层的底板直接充水含水层为奥陶系灰岩岩溶裂隙含水层(刘守强, 2012; 武强等, 2013a, 2013b; 李建中等, 2020),该含水层的富水性是评价矿井水害危险程度的主要指标之一(武强, 2014; 国家煤矿安全监察局, 2018)。现要求解井下水试验后井田内的水位分布问题,将研究区的范围外推至矿井所处的矿区奥灰岩溶含水层地下水系统的边界处,以获得较为合适的模型边界条件(Fitts, 2010; Haitjema, 2015),依据以往该矿及邻矿的水文地质勘探资

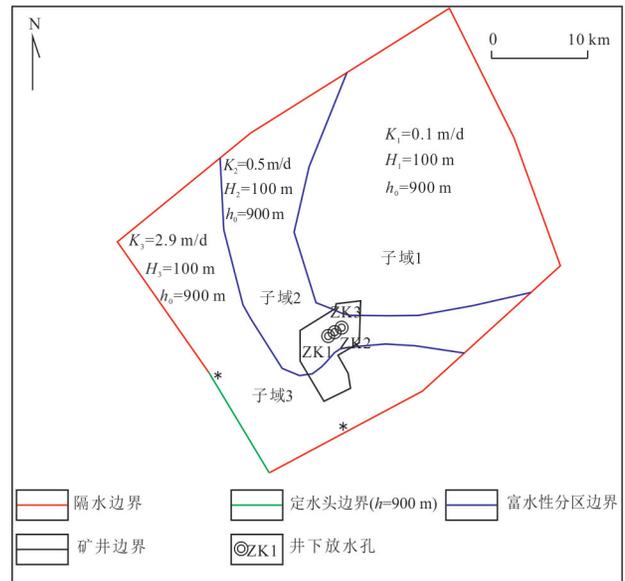


图 1 奥灰含水层水流场模型平面图

Fig.1 Plan view of flow field model in Ordovician limestone aquifer

K 为渗透系数; H 为含水层厚度; h_0 为初始平均水位

料,将奥灰含水层按照岩溶发育程度划分为 3 个子域(图 1)。子域的内外边界用上文描述的四阶非线性强度线汇模拟,井下放水孔 ZK1、ZK2、ZK3 (流量分别为 $108 \text{ m}^3/\text{h}$ 、 $240 \text{ m}^3/\text{h}$ 、 $377 \text{ m}^3/\text{h}$)产生的复势用式(8)模拟,将相关含水层参数输入模型,本次模拟指定线汇长度为 1 000 m,程序会自动按指定的长度对原有的边界线汇进行剖分,模型的内外边界共剖分为 337 个线汇;由式(15)可知每个线汇各含 4 个未知参数,所以在每个线汇上设置 4 个水位控制点和 4 段法向流量控制段,每条定水头边界或定法向流量边界可生成 4 个包含未知参数的方程,依据同属两侧子域的内边界上任意一点的水位相等且通过该边界上任意一段的两侧子域法向流量相等,每条内边界可生成 8 个包含未知参数的方程,因此模型方程组共含 1 348 个未知参数和 1 348 个方程。模型方程组在程序中求解后,可用 python 命令生成矿井等水位图(图 2)和边界条件吻合度分析图(图 3~图 8)。

从图 2 可以看出,根据模型计算结果生成的井田范围内等水位图与观测孔水位比较吻合,水位偏差绝对值范围为 1.36~5.27 m。等水位线在渗透系数相差较大的子域 2 和子域 3 内边界(图 2 中蓝色实线)处发生了明显的弯折但保持连续,这种变化是符合预期的。现取井田内任意一个代

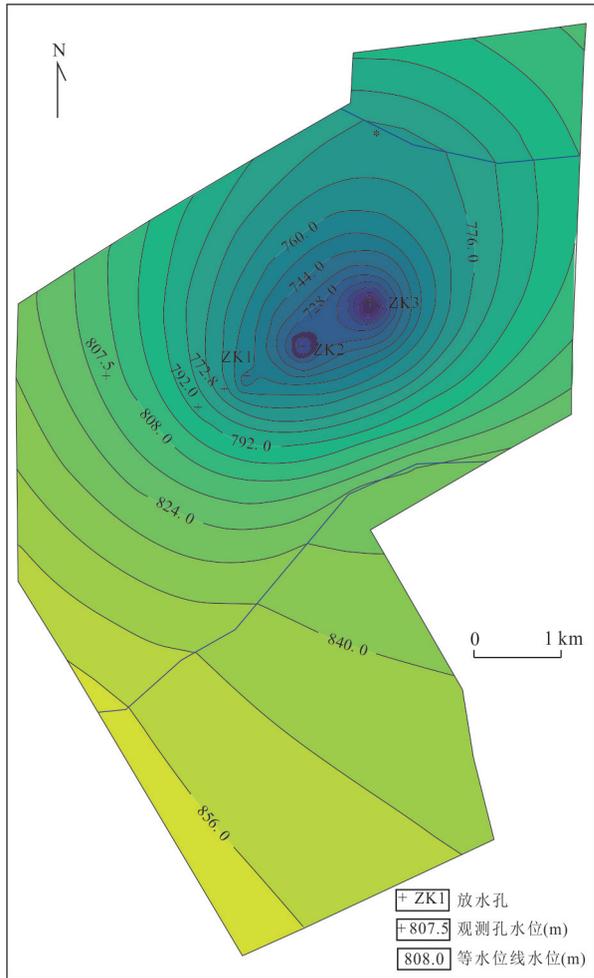


图2 矿井放水试验后的等水位图

Fig.2 Contour map of head after the drainage test

表子域内边界的线汇(图2中标*处)来分析内边界条件的满足程度,图3为代表子域1和子域2公共边界线汇上子域1和子域2的水位分布情况,可以看出,两个子域在公共边界上的水位非常吻合;图4和图5反映了分别由子域1和子域2产生的通过公共边界的法向流量也相等;图6是代表图1中标*处定水头边界($h=900\text{ m}$)线汇上的水位分布情况,图7和图8是通过图1中标*处定法向流量边界线汇的流量分布情况,可以看出模型对研究区水流场外边界的模拟也比较理想。但需要注意,线汇上的4个控制点精确满足定水头边界条件,而在控制点间则是近似满足,同样地,通过线汇上的4个分段的流量精确满足定法向流量边界条件,而在每个分段内的小分段上则是近似满足;线汇长度剖分得更短可以实现更精确边界条件满足,但模型求解需要更大的计算量和更长的计算时间。

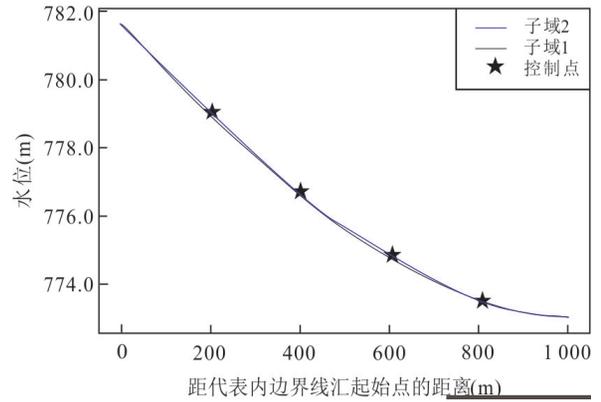


图3 子域内边界线汇水位分布

Fig.3 Head on inter-domain boundary represented by line-sink

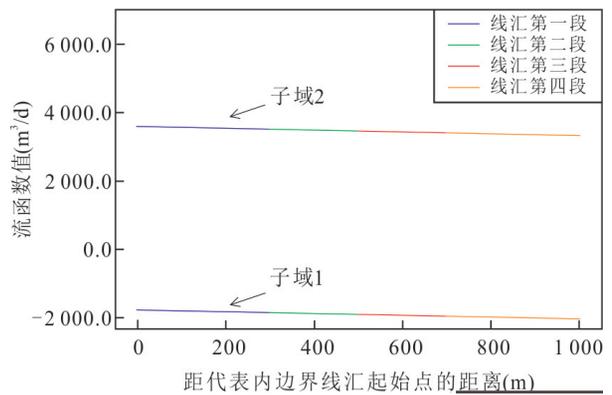


图4 子域内边界线汇上流函数值分布

Fig.4 Values of stream function on inter-domain boundary represented by line-sink

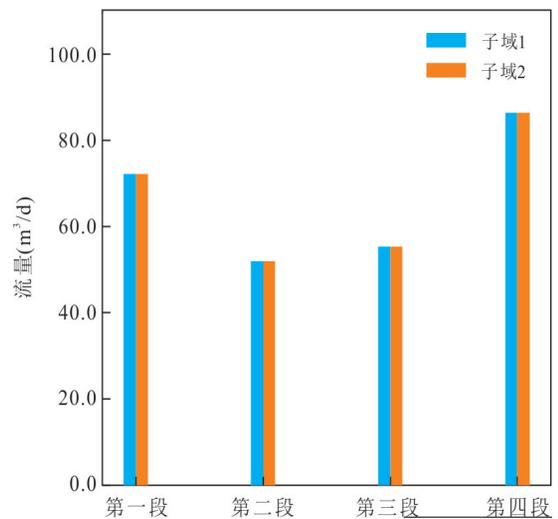


图5 通过子域内边界线汇各段流量

Fig.5 Discharge across segments of inter-domain boundary represented by line-sink

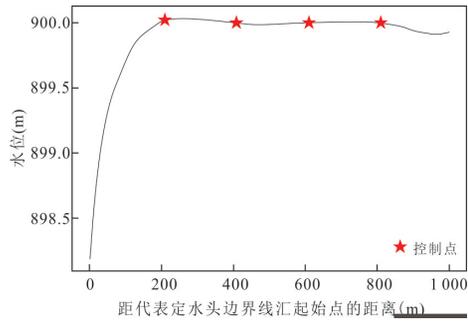


图6 定水头边界线汇水位分布

Fig.6 Head on head-specified boundary represented by line-sink

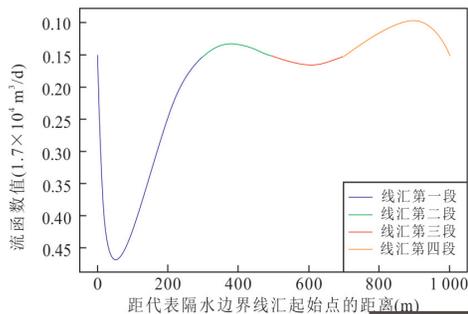


图7 定流量边界线汇上流函数值分布

Fig.7 Values of stream function on normal flux-specified boundary represented by line-sink

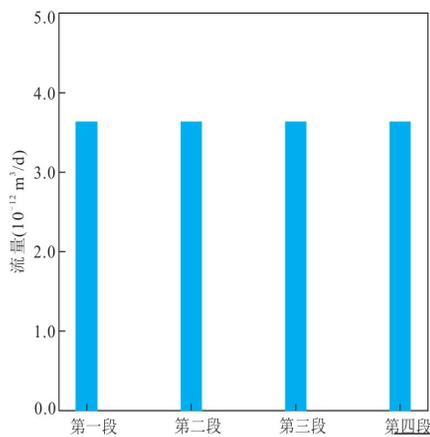


图8 通过定流量边界线汇各段流量

Fig.8 Discharge across segments of normal flux-specified boundary represented by line-sink

4 结论

(1)通过煤矿放水试验实例验证,表明子域解析元素法是一种有效的模拟煤矿地下水流场的数值方法,可为分析矿井水文地质条件和制定矿井防

治水方案提供量化分析结果.

(2)本文独立推导出了解析元素法中非线性强度线汇的复势函数表达式,并用数学方法分析论证了非线性强度线汇的流量势与流函数的空间分布特征,在此基础上,用python语言编写了求解煤矿地下水流场模型的子域解析元素法程序,且在求解程序中实现了依据不同的模拟精度要求对子域解析元素法中的非线性强度高阶线汇进行自动剖分的功能.

(3)子域解析元素法可以根据模拟精度要求或模型边界条件的变化通过修改线汇属性高效地调整模型,所以在模型调整的灵活度上强于有限差分、有限元等数值方法.同时,需要注意的是,在确定线汇的剖分长度时,需要在模型求解结果精度和模型计算效率上做好平衡.

References

- Bakker, M., 2014. Python Scripting: The Return to Programming. *Groundwater*, 52(6): 821–822. <https://doi.org/10.1111/gwat.12269>
- Bakker, M., 2019. Data-Sharing Requires Script-Sharing. *Groundwater*, 57(2): 187. <https://doi.org/10.1111/gwat.12852>
- Bakker, M., Kelson, V. A., 2009. Writing Analytic Element Programs in Python. *Groundwater*, 47(6): 828–834. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.2009.00583.x>
- Chen, C. X., Tang, Z. H., Hu, L. T., 2014. Theoretical Method and Model Design of Groundwater Flow Numerical Simulation. Geological Publishing House, Beijing (in Chinese).
- Fienen, M. N., Bakker, M., 2016. HESS Opinions: Repeatable Research: What Hydrologists can Learn from the Duke Cancer Research Scandal. *Hydrology and Earth System Sciences*, 20(9): 3739–3743. <https://doi.org/10.5194/hess-20-3739-2016>
- Fitts, C. R., 1997. Analytic Modeling of Impermeable and Resistant Barriers. *Groundwater*, 35(2): 312–317. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.1997.tb00088.x>
- Fitts, C. R., 2010. Modeling Aquifer Systems with Analytic Elements and Subdomains. *Water Resources Research*, 46(7): W07521. <https://doi.org/10.1029/2009wr008331>
- Fitts, C. R., 2012. Groundwater Science (2nd Edition). Elsevier/Academic Press, San Diego.
- Fitts, C. R., 2018. Modeling Dewatered Domains in Multi-layer Analytic Element Models. *Groundwater*, 56(4): 557–561. <https://doi.org/10.1111/gwat.12645>

- Fitts, C. R., Godwin, J., Feiner, K., et al., 2015. Analytic Element Modeling of Steady Interface Flow in Multilayer Aquifers Using AnAqSim. *Groundwater*, 53(3): 432–439. <https://doi.org/10.1111/gwat.12225>
- Haitjema, H. M., 1995. Analytic Element Modeling of Groundwater Flow. Academic Press, San Diego.
- Haitjema, H. M., 2015. The Cost of Modeling. *Groundwater*, 53(2): 179. <https://doi.org/10.1111/gwat.12321>
- Haitjema, H. M., Hunt, R. J., Jankovic, I., et al., 2006. Foreword: Ground Water Flow Modeling with the Analytic Element Method. *Groundwater*, 44(1): 1–2. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.2005.00144.x>
- Jiang, L.Q., Sun, R.L., Liang, X., 2020. Predicting Groundwater Flow and Transport in the Heterogeneous Aquifer Sandbox Using Different Parameter Estimation Methods. *Earth Science* (in Chinese with English abstract). <https://doi.org/10.3799/dqkx.2020.268>
- Li, J.Z., Zhou, A.G., Zhou, J.W., et al., 2020. Risk Assessment of Aquifer Destruction in Underground Mining Coal of North China: A Case Study of Hongshan Mine in Zibo City. *Earth Science*, 45(3): 1027–1040 (in Chinese with English abstract).
- Liu, S.Q., 2012. Research on the Evaluation Method of Coal Seam Floor Water Bursting and Its Application (Dissertation). China University of Mining & Technology, Beijing (in Chinese with English abstract).
- National Coal Mine Safety Supervision Bureau, 2018. Coal Mine Water Prevention and Control Regulations. Coal Industry Press, Beijing (in Chinese).
- Ranjram, M., Craig, J. R., 2018. Closed Analytic Elements with Flexible Geometry. *Groundwater*, 56(5): 816–822. <https://doi.org/10.1111/gwat.12649>
- Steward, D. R., 2015. Analysis of Discontinuities across Thin Inhomogeneities, Groundwater/Surface Water Interactions in River Networks, and Circulation about Slender Bodies Using Slit Elements in the Analytic Element Method. *Water Resources Research*, 51(11): 8684–8703. <https://doi.org/10.1002/2015wr017526>.
- Strack, O. D. L., 1989. Groundwater Mechanics. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Strack, O. D. L., 2003. Theory and Applications of the Analytic Element Method. *Reviews of Geophysics*, 41(2): 1005. <https://doi.org/10.1029/2002rg000111>
- Strack, O. D. L., 2017a. Vertically Integrated Flow in Stratified Aquifers. *Journal of Hydrology*, 548: 794–800. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.01.039>
- Strack, O. D. L., 2017b. Analytical Groundwater Mechanics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Strack, O. D. L., 2018. Limitless Analytic Elements. *Water Resources Research*, 54(2): 1174–1190. <https://doi.org/10.1002/2017wr022117>
- Toller, E. A. L., Strack, O. D. L., 2019. Interface Flow with Vertically Varying Hydraulic Conductivity. *Water Resources Research*, 55(11): 8514–8525. <https://doi.org/10.1029/2019wr024927>
- Wang, X.S., Wan, L., 2011. Groundwater Movement Equations. Geological Publishing House, Beijing (in Chinese).
- Wu, Q., 2014. Progress, Problems and Prospects of Prevention and Control Technology of Mine Water and Reutilization in China. *Journal of China Coal Society*, 39(5): 795–805 (in Chinese with English abstract).
- Wu, Q., Cui, F.P., Zhao, S.Q., et al., 2013a. Type Classification and Main Characteristics of Mine Water Disasters. *Journal of China Coal Society*, 38(4): 561–565 (in Chinese with English abstract).
- Wu, Q., Zhao, S.Q., Sun, W.J., et al., 2013b. Classification of the Hydrogeological Type of Coal Mine and Analysis of Its Characteristics in China. *Journal of China Coal Society*, 38(6): 901–905 (in Chinese with English abstract).
- Zhang, Z. Y., Wang, W. K., Yeh, T. C. J., et al., 2016. Finite Analytic Method Based on Mixed-Form Richards' Equation for Simulating Water Flow in Vadose Zone. *Journal of Hydrology*, 537: 146–156. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2016.03.035>

附中文参考文献

- 陈崇希, 唐仲华, 胡立堂, 2014. 地下水流数值模拟理论方法及模型设计. 北京: 地质出版社.
- 国家煤矿安全监察局, 2018. 煤矿防治水细则. 北京: 煤炭工业出版社.
- 蒋立群, 孙蓉琳, 梁杏, 2020. 含水层非均质性不同刻画方法对地下水流和溶质运移预测的影响. 地球科学. <https://doi.org/10.3799/dqkx.2020.268>
- 李建中, 周爱国, 周建伟, 等, 2020. 华北煤田矿山开采导致含水层破坏风险评估: 以淄博洪山煤矿为例. 地球科学, 45(3): 1027–1040.
- 刘守强, 2012. 煤层底板突水评价方法与应用研究(博士学位论文). 北京: 中国矿业大学.
- 王旭升, 万力, 2011. 地下水运动方程. 北京: 地质出版社.
- 武强, 2014. 我国矿井水防控与资源化利用的研究进展、问题和展望. 煤炭学报, 39(5): 795–805.
- 武强, 崔芳鹏, 赵苏启, 等, 2013a. 矿井水害类型划分及主要特征分析. 煤炭学报, 38(4): 561–565.
- 武强, 赵苏启, 孙文洁, 等, 2013b. 中国煤矿水文地质类型划分与特征分析. 煤炭学报, 38(6): 901–905.