

<https://doi.org/10.3799/dqkx.2025.256>



有限差分法模拟潜水含水层井流的水位校正与流线识别

张 帅^{1,2,3,4}, 王旭升^{1,5}, 韩鹏飞^{1,5*}, 景 明^{2,3,4}, 陈伟伟^{2,3,4}, 常布辉^{2,3,4}

1. 中国地质大学(北京)水利部地下水保护重点实验室, 北京 100083
2. 黄河水利委员会黄河水利科学研究院, 河南郑州 450003
3. 黄河水利委员会黄河水利科学研究院水利部黄河重点实验室, 河南郑州 450003
4. 河南省黄河流域生态环境保护与修复重点实验室, 河南郑州 450003
5. 中国地质大学(北京)水资源与环境工程北京市重点实验室, 北京 100083

摘 要: 中心网格有限差分法模拟水位与流线是开展众多水文地质工作的基础. 为了解决潜水含水层中抽水井处水位模拟误差问题并精确识别流线. 本研究基于复势理论, 推导了中心网格有限差分法抽水井处水位校正公式, 耦合数值模型量化分析了水位校正对流线精度的影响. 结果表明, 校正公式可显著提升抽水井处水位模拟精度; 同时明确了当离散网格尺寸约为井半径的 5 倍时, 无需校正即可同时保证水位与流线的模拟精度. 该研究为解决数值模拟中离散化带来的模拟误差提供了理论依据与实用判据.

关键词: 中心网格有限差分; 潜水含水层; 抽水井; 水位; 流线; 环境地质学.

中图分类号: P641

文章编号: 1000—2383(2026)06—2152—09

收稿日期: 2025-07-10

Water Level Correction and Streamline Tracing in Phreatic Aquifer Pumping Well Flow Simulation Using Finite Difference Method

Zhang Shuai^{1,2,3,4}, Wang Xusheng^{1,5}, Han Pengfei^{1,5*}, Jing Ming^{2,3,4}, Chen Weiwei^{2,3,4}, Chang Buhui^{2,3,4}

1. Key Laboratory of Groundwater Conservation of Ministry of Water Resources, China University of Geosciences (Beijing), Beijing 100083, China
2. Yellow River Institute of Hydraulic Research, Yellow River Conservancy Commission, Zhengzhou 450003, China
3. Key Laboratory of Yellow River of Ministry of Water Resources, Yellow River Institute of Hydraulic Research, Yellow River Conservancy Commission, Zhengzhou 450003, China
4. Henan Key Laboratory of YB Ecological Protection and Restoration, Zhengzhou 450003, China
5. Beijing Key Laboratory of Water Resources and Environment Engineering, China University of Geosciences (Beijing), Beijing 100083, China

Abstract: Block-centered finite difference method for simulating water levels and streamlines is the basis of numerous hydrogeological works. To address the simulation error of water levels at pumping wells in a phreatic aquifer and accurately

基金项目: 水利部地下水保护重点实验室开放课题资助项目; 河南省自然科学基金项目(No.252300423266); 国家自然科学基金项目(Nos. U2443204, 42302280).

作者简介: 张帅(1992—), 男, 工程师, 博士, 从事三维地下水循环研究工作, 主要从事地下水循环模拟研究. ORCID: 0000-0001-6819-5586. E-mail: zhangqshuai@163.com

*** 通讯作者:** 韩鹏飞, 副教授, 博士, 主要从事地下水循环研究工作. E-mail: pfhan@cugb.edu.cn

引用格式: 张帅, 王旭升, 韩鹏飞, 景明, 陈伟伟, 常布辉, 2026. 有限差分法模拟潜水含水层井流的水位校正与流线识别. 地球科学, 51(6): 2152—2160.

Citation: Zhang Shuai, Wang Xusheng, Han Pengfei, Jing Ming, Chen Weiwei, Chang Buhui, 2026. Water Level Correction and Streamline Tracing in Phreatic Aquifer Pumping Well Flow Simulation Using Finite Difference Method. *Earth Science*, 51(6): 2152—2160.

identify streamlines, this study derives a water level correction formula for pumping wells in the block-centered finite difference method based on complex potential theory. A coupled numerical model is developed to quantitatively analyze the impact of water level correction on the accuracy of streamlines. The results demonstrate that the correction formula significantly improves the simulation accuracy of water levels at pumping wells. Furthermore, it is clarified that when the discrete grid size is approximately 5 times the well radius, both water level and streamline simulation accuracy can be ensured without the need for correction. This study provides a theoretical basis and practical criterion for mitigating simulation errors caused by discretization in numerical modeling.

Key words: block-centered finite difference; phreatic aquifer; pumping well; water level; streamline; environmental geology.

0 引言

精确模拟抽水井附近地下水位与流线是开展地下水资源管理、地下水源地保护区划分、地下水污染修复等众多水文地质工作的基础(刚什婷和邓英尔, 2015; 汪洋等, 2018; 李旭等, 2022; 王新港, 2023; 苏世林等, 2024). 其方法有解析与数值模拟两种. 解析法通常是用复势函数表示地下水等水位线与流线, 但使用条件苛刻, 难以刻画复杂边界条件的地下水流动(Zhang, 2024). 数值模拟法适用于复杂水文地质条件, 是绘制地下水流场最常用的方法(Poeter and Hsieh, 2020). 在模拟地下水位与流线的众多模型中, 中心网格有限差分模型因求解速度快, 成熟度高而被广泛应用(杨建宏, 2008), 例如GMS(groundwater modeling system)软件中的MODFLOW与MODPATH模型, MODFLOW是通过中心网格有限差分方式模拟地下水位空间分布; MODPATH是基于MODFLOW水位模拟结果追踪粒子运移轨迹, 识别出地下水流线.

中心网格有限差分法模拟已知井周半径大小的抽水井处水位往往存在误差(夏强等, 2007; MacMillan and Schumacher, 2015). 在正方形中心网格有限差分模型中, 网格中心水位相当于0.2倍正方形网格边长处水位(Prickett, 1967; Lerner, 1989). 中心网格有限差分法模拟承压含水层中抽水井与自流井处水位的校正公式已经被前人提出(陈崇希等, 2007; 王旭升, 2008), 但潜水含水层中抽水井处模拟水位的校正问题尚未解决.

有限差分法识别流线是基于有限差分法模拟水位的水力梯度并以一定时间或空间步长的正向或逆向粒子追踪识别粒子轨迹运移的过程(Pollock, 2016), 识别的流线精度受抽水井处水位模拟误差的影响程度尚不明确. 识别地下水流线的首要任务是释放粒子追踪起点. 例如, 在GMS中, MODPATH模型无法输入井周半径参数, 在抽水

井上释放粒子追踪起点时, MODPATH仅可以设置粒子数量, 而默认粒子按照某种规律规则分布, 但抽水井上粒子追踪起点分布规则现有文献资料并未报道.

本文将以下水模拟软件GMS为例, 通过复势函数推导矩形中心网格有限差分法模拟平面二维潜水含水层抽水井处水位校正公式, 明确MODPATH中抽水井上粒子追踪起点分布规则, 给出抽水井处水位与流线模拟误差的解决办法, 为精确绘制地下水流场提供有力的理论依据和技术支持.

1 理论方法

1.1 复势函数

根据复势理论, 平面二维稳态地下水流场中的等水位线与流线可用流量势(后文简称势函数)与流函数来表示(Campos, 2010; Strack, 1989). 复势函数(Ω)由实部(Φ)与虚部(Ψ)两部分组成, 形如:

$$\Omega = \Phi + i\Psi, \quad (1)$$

式(1)中, Φ 、 Ψ 分别为势函数和流函数, L^3/T .

在含水层水平、垂向无补给排泄、Dupuit假设条件下, 均质各向同性介质潜水含水层中势函数与地下水位之间的关系可以表示为(Strack, 1989):

$$\Phi = \frac{1}{2}Kh^2, \quad (2)$$

式(2)中, K 为含水层渗透系数, L/T ; h 为潜水含水层中相对含水层底板的地下水位高度, L .

在笛卡尔坐标系中, 均匀侧向流和抽水井共同扰动的流场符合线性叠加关系, 势函数与流函数可分别表示为(Strack, 1989):

$$\Phi = -q(X \cos \alpha + Y \sin \alpha) + \frac{Q}{4\pi} \ln \left[(X - X_p)^2 + (Y - Y_p)^2 \right] + \Phi_0, \quad (3a)$$

$$\Psi = q(X \sin \alpha - Y \cos \alpha) + \frac{Q}{2\pi} \operatorname{atan} 2(Y - Y_p, X - X_p) + \Psi_0, \quad (3b)$$

式(3)中, q 为均匀侧向流的单宽流量, L^2/T ; α 为均匀侧向流方向, 沿 X 正半轴方向为 0 基准线, 沿逆时针方向 α 逐渐增大, α 取值范围为 $[0, 2\pi]$; Q 为抽水井流量, L^3/T , Q 为正数 (Q 为负数表示注水井); (X_p, Y_p) 为抽水井位置; Φ_0, Ψ_0 是常量, 表示基准势函数与流函数, L^3/T . 值得注意的是, 多井扰动的流场可由叠加单个抽水井得到. 若单宽流量 q 沿 X, Y 方向的分量记为 q_x, q_y , 则潜水含水层中的 q_x, q_y 可分别表示为:

$$\begin{aligned} q_x &= -Kh \frac{\partial h}{\partial X} = KhJ_x, \\ q_y &= -Kh \frac{\partial h}{\partial Y} = KhJ_y, \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)中, J_x, J_y 是 X, Y 方向上的水力梯度, 当潜水面可近似水平时, $h, J(J_x \text{ 或 } J_y)$ 可近似为常数.

1.2 矩形中心网格有限差分法抽水井处校正公式

1.2.1 抽水井处水位模拟原理 在中心网格有限差分模型中, 抽水井位于网格中心的格点位置. 网格大小用 $\Delta X, \Delta Y$ 表示 ($\Delta X, \Delta Y$ 的量纲为 L), 字母 i, j 和数字表示格点位置与网格编号, 如图 1 所示.

网格 (i, j) 与周边相邻网格水量均衡方程为 (Ramadhan, 2015):

$$Q = \frac{K}{\Delta X} [A_1(h_{i-1,j} - h_{i,j}) + A_2(h_{i+1,j} - h_{i,j})] + \frac{K}{\Delta Y} [A_3(h_{i,j-1} - h_{i,j}) + A_4(h_{i,j+1} - h_{i,j})], \quad (5)$$

式(5)中, $A_n (n=1, \dots, 4)$ 为过水断面. 需要注意的是, 为了保证现有中心网格有限差分模型中 Q 与复势函数中 Q 符号一致, 式(5)中的 Q 取正数表示抽水井, 取负数表示注水井.

对于潜水含水层, 过水断面由饱和带厚度表示为:

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta Y h_{i-1,j}, A_2 = \Delta Y h_{i+1,j}, \\ A_3 &= \Delta X h_{i,j-1}, A_4 = \Delta X h_{i,j+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

在计算均质各向同性介质模型的网格间流量时, 现有中心网格有限差分法将过水断面处理为 (Mcdonald and Harbaugh, 1988):

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta Y \frac{h_{i-1,j} + h_{i,j}}{2}, A_2 = \Delta Y \frac{h_{i+1,j} + h_{i,j}}{2}, \\ A_3 &= \Delta X \frac{h_{i,j-1} + h_{i,j}}{2}, A_4 = \Delta X \frac{h_{i,j+1} + h_{i,j}}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)代入式(5), 整理得

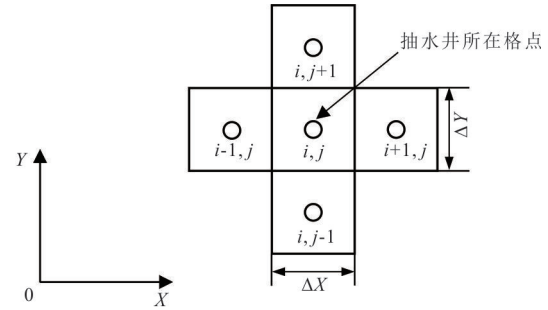


图 1 抽水井所在网格与周边网格格点编号示意

Fig.1 Node numbers for the pumping well cell and surrounding grid cells

$$\begin{aligned} Q &= K\Delta Y \left(\frac{h_{i+1,j}^2 - h_{i,j}^2}{2\Delta X} + \frac{h_{i-1,j}^2 - h_{i,j}^2}{2\Delta X} \right) + \\ &K\Delta X \left(\frac{h_{i,j+1}^2 - h_{i,j}^2}{2\Delta Y} + \frac{h_{i,j-1}^2 - h_{i,j}^2}{2\Delta Y} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

这就是中心网格有限差分方程.

1.2.2 校正公式 在均质各向同性潜水含水层中, 不考虑垂向补给与排泄、井损与表皮效应, 基于 Dupuit 假设条件下的平面二维潜水稳定流中, 抽水井所在网格格点与周边相邻网格格点的水位二次方满足线性关系 (Bear, 1979), 由式(2)与式(3a)可得:

$$\begin{aligned} h_{i+1,j}^2 - h_w^2 &= \frac{Q}{\pi K} \ln \left(\frac{\Delta X}{r_w} \right), h_{i-1,j}^2 - h_w^2 = \\ &\frac{Q}{\pi K} \ln \left(\frac{\Delta Y}{r_w} \right), \\ h_{i,j+1}^2 - h_w^2 &= \frac{Q}{\pi K} \ln \left(\frac{\Delta X}{r_w} \right), h_{i,j-1}^2 - h_w^2 = \\ &\frac{Q}{\pi K} \ln \left(\frac{\Delta Y}{r_w} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

对于一般矩形网格, $\Delta X \neq \Delta Y$, 将式(9)代入式(7), 得到矩形中心网格有限差分法潜水含水层抽水井处水位校正公式为:

$$\begin{aligned} h_w^2 &= h_{i,j}^2 - \frac{Q}{\pi K} \frac{1}{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \left(\Delta Y^2 \ln \left(\frac{\Delta X}{r_w} \right) + \right. \\ &\left. \Delta X^2 \ln \left(\frac{\Delta Y}{r_w} \right) - \pi \Delta X \Delta Y \right). \end{aligned} \quad (10)$$

若网格大小 $\Delta X = \Delta Y$, 由式(10)整理可得正方形中心网格有限差分法潜水含水层抽水井处水位校正公式为:

$$h_w^2 = h_{i,j}^2 - \frac{Q}{\pi K} \left(\ln \left(\frac{\Delta X}{r_w} \right) - \frac{\pi}{2} \right). \quad (11)$$

1.3 MODPATH 流线识别原理

1.3.1 核心算法原理 MODPATH 识别地下水流线的核心算法是基于中心网格有限差分的粒子追踪法,该算法最早由 David W. Pollock 于 1988 年开发 (Pollock, 1988), 也称为 Pollock 法. Pollock 算法的关键思想是假设两点间地下水速度呈线性分布 (Ramadhan, 2015), 具体原理如下.

在平面二维地下水流动中, 如果粒子从点 (X_p, Y_p) 运移到点 (X_{p+1}, Y_{p+1}) 的时间步长为 ΔT , 并且以 (X_p, Y_p) 处的速度 $V(X_p, Y_p)$ 运移, 则 X, Y 方向的位移分量可分别计算为:

$$\Delta X = V_x(X_p, Y_p) \Delta T, \Delta Y = V_y(X_p, Y_p) \Delta T, \quad (12)$$

式(12)中, V_x, V_y 分别为 X, Y 方向的速度分量. 假设点 (X_p, Y_p) 周围流速的空间分布是线性的, 则其变化梯度可表示为:

$$A_x = \frac{V_x(X + \Delta X, Y + \Delta Y) - V_x(X, Y)}{\Delta X},$$

$$A_y = \frac{V_y(X + \Delta X, Y + \Delta Y) - V_y(X, Y)}{\Delta X}, \quad (13)$$

式(13)中, A_x 和 A_y 在一个步长计算中为常数, 分别表示 X 和 Y 方向上的流速梯度. 按照这种流速变化规律进行粒子追踪, 则下一步的实际位置为:

$$X_{p+1} = X_p + V_x(X_p, Y_p) \frac{\exp(A_x \Delta T) - 1}{A_x},$$

$$Y_{p+1} = Y_p + V_y(X_p, Y_p) \frac{\exp(A_y \Delta T) - 1}{A_y}. \quad (14)$$

在计算过程中, A_x 或 A_y 可能趋近于 0, 此时应注意以下极限公式:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\exp(A \Delta T) - 1}{A} = \Delta T, \quad (15)$$

式(15)中, A 可以取 A_x 或 A_y . 这就是 MODPATH 粒子追踪的核心算法, 此外, MODPATH 还通过粒子进出网格单元位置优化粒子追踪步长 ΔT , 提高流线识别精度.

1.3.2 井上粒子追踪起点分布规则 合理布设粒子追踪起点位置是识别地下水流线的首要任务. 在 GMS 软件中, 粒子追踪起点布设方式有 3 种, 分别为: (1) 在网格单元空间内布设粒子追踪起点; (2) 导入外部散点坐标数据作为粒子追踪起点; (3) 在抽水井上布设粒子追踪起点 (Pollock, 2016; 李若怡, 2022). 第(1)种粒子追踪起点的分布规律是在网格空间内按行和列空间均匀分布, 第(2)种粒子追踪起点分布规则取决于散点坐标数据, 第(3)种粒子追踪起点数量最大限值为 100. 笔者通过大量模拟实验最终确定, 在 MODPATH 模型中, 抽水井

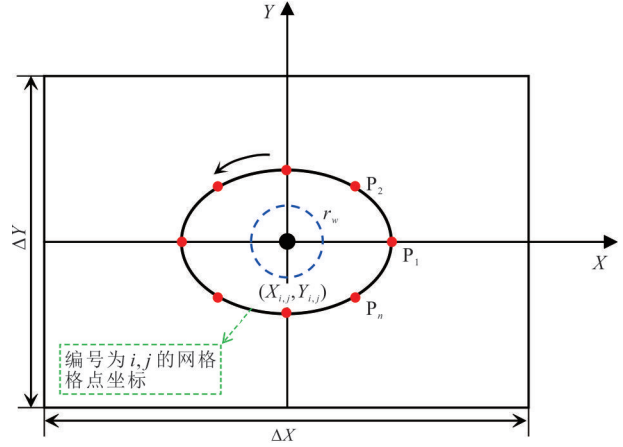


图2 MODPATH井上粒子追踪起点分布示意

Fig.2 Starting point distribution for particle tracking on the well rim in MODPATH

上释放的粒子追踪起点 (P_n) 从 X 轴正方向出发沿逆时针均匀分布于椭圆上, 如图2所示, 椭圆大小与抽水井所在网格大小相关, 即椭圆的轴长为抽水井所在网格长宽的一半:

$$\frac{16(X - X_{i,j})^2}{\Delta X^2} + \frac{16(Y - Y_{i,j})^2}{\Delta Y^2} = 1. \quad (16)$$

当 $\Delta X = \Delta Y$ 时, 椭圆方程简化为圆形方程,

$$\frac{(X - X_{i,j})^2}{\left(\frac{\Delta X}{4}\right)^2} + \frac{(Y - Y_{i,j})^2}{\left(\frac{\Delta X}{4}\right)^2} = 1. \quad (17)$$

而抽水井的井周圆形方程为:

$$\frac{(X - X_{i,j})^2}{r_w^2} + \frac{(Y - Y_{i,j})^2}{r_w^2} = 1. \quad (18)$$

联立方程(17)与(18)得到, $\Delta X = \Delta Y = 4r_w$ 时, 粒子追踪起点分布于抽水井井周上.

2 案例分析

2.1 案例设计

为了验证中心网格有限差分模拟潜水含水层中抽水井处水位校正公式的合理性, 定量分析抽水井处水位模拟误差对 MODPATH 识别流线的影 响, 本文设计 2 个典型案例 A 和 B, 剖面示意如图 3. 案例 A: 在均质各向同性介质的潜水含水层中, 含水层可近似为圆岛; 地面近似水平且距离隔水底板的高度 $h_g = 50$ m, 潜水面水平; 圆岛边界为定水头边界, 定水头为 25 m; 初始水位 $h_0 = 25$ m; 隔水底板水平, 且被视为基准面, 水位 $h_r = 0$ m; 坐标原点 (0 m, 0 m) 处有一口抽水井, 井滤管贯穿整个含水层, 抽

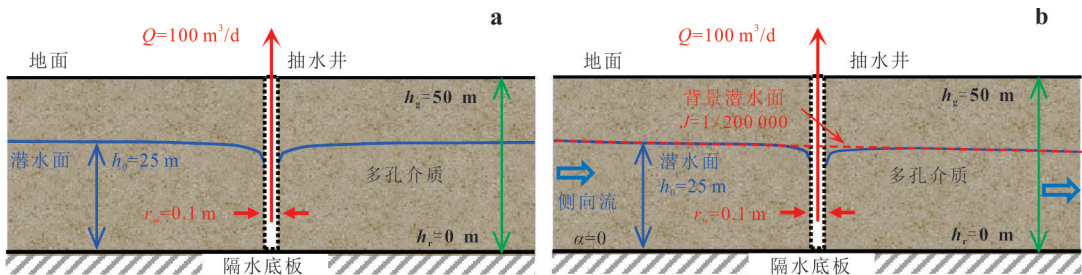


图3 案例概念模型剖面示意
Fig.3 Conceptual model cross-sections
a.案例A剖面图;b.案例B剖面图

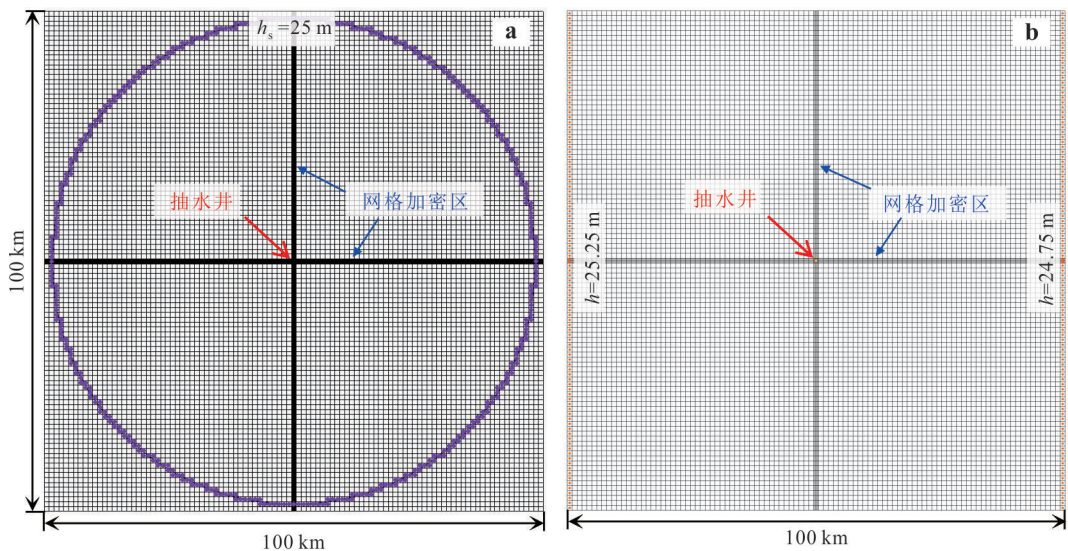


图4 MODFLOW 模型网格剖分示意
Fig.4 Grid discretization in MODFLOW
a.案例A;b.案例B

水流量 $Q=100\text{ m}^3/\text{d}$,井半径 $r_w=0.1\text{ m}$,忽略井损与表皮效应;不考虑降水和蒸发的垂向补给作用,地下水流动可近似为平面二维稳定流;渗透系数 $K=1\text{ m/d}$.案例B:考虑平面无限大含水层存在侧向流,侧向流方向水平,抽水井开采前的背景潜水面水力梯度 $J=1/200\,000$,渗透系数 $K=10\text{ m/d}$.

在MODFLOW中,模型范围设置为 $100\text{ km} \times 100\text{ km}$.抽水井位于模拟区中心,网格大小一般为 $1\,000\text{ m} \times 1\,000\text{ m}$.为了分析抽水井处水位模拟精度及其对流线模拟结果的影响,在案例A中,以圆周为常水头边界,水头值为 25 m ,对抽水井所在网格进行局部加密,加密后抽水井所在网格保持为正方形,边长 ΔX 取值为 $0.32 \sim 1\,000.00\text{ m}$,如图4a所示.在案例B中,MODFLOW模型上下两侧边界默认为零通量边界,左右两侧边界设置为定水头边

界,水头值分别为 25.25 m 、 24.75 m ,如图4所示.

2.2 井中水位模拟结果

通过案例A分析,得到抽水井处水位模拟值,真实解(基于复势理论的解析解),潜水含水层抽水井处水位校正公式(11)修正的水位校正值,结果如图5所示.对比抽水井处水位模拟值与真实值,得到以下结果:模拟值随网格尺寸 ΔX 减小而减小,模拟值与 ΔX 呈对数关系,如图5所示.当 $\Delta X > 4.81r_w$ 时,抽水井处水位模拟值大于真实值,如: $\Delta X=1\,000\text{ m}$ 时,抽水井处水位模拟值为 21.19 m ,比抽水井处水位真实值 14.40 m 偏大 6.80 m ;当 $\Delta X=4.81r_w=0.48\text{ m}$ 时,抽水井处水位模拟值约 14.35 m ,与真实值 14.40 m 基本一致;当 $\Delta X < 4.81r_w$ 时,抽水井处水位模拟值小于真实值;如: $\Delta X=0.32\text{ m}$ 时,抽水井处水位模拟值为 13.67 m ,模拟值比真实值 14.40 m 偏小 0.72 m .

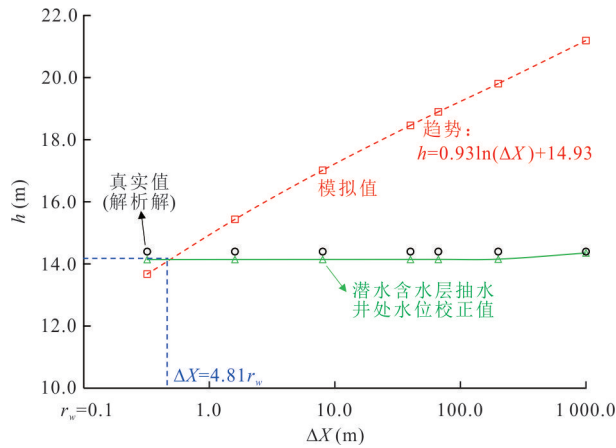


图5 抽水井处水位模拟值、校正值与真实值对比

Fig.5 Comparison of simulated, calibrated, and analytical water levels on the pumping well rim

2.3 流线识别结果

在案例B中,由式(3b)计算得到真实地下水流线,地下水流线在空间分布上关于 $Y=0$ 对称,如图6a所示.流函数值等于0的流线是上游地下水汇入抽水井的最外围流线,即地下水能否被抽水井抽出的分界线.井周上位于分界线的点是(0.1 m, 0 m),井周外,当 $Y=0$ 时,分界线上 X 取最大值12 700 m;当 $X=-10\ 000$ m时,分界线上的纵坐标为 $Y=25\ 000$ m.

在抽水井井周上均匀布设17个粒子追踪起点,若以角度 β 表示井周上粒子追踪起点位置,则相邻两个起点与井点连线间的夹角为 $\pi/8$.通过GMS软件中MODFLOW与MODPATH相结合模拟得到地下水流线,如图6b和6c所示.当 $\Delta X=200$ m时,水位模拟误差使MODPATH识别的流线与真实流线明显存在区别.如:粒子追踪起点位于 $\beta=0$ 的流线, $X=-10\ 000$ m,真实流线的纵坐标为25 000 m,而MODPATH识别流线的纵坐标仅为0.7 m;粒子追踪起点位于 $\beta=\pi/2$ 的流线, $X=-10\ 000$ m,真实流线的纵坐标为10 000 m,而MODPATH识别的流线是分界线,纵坐标为1 247 m,如图6b.当 $\Delta X=0.32$ m时,MODPATH识别的所有流线与真实流线基本一致, $X=-10\ 000$ m,MODPATH识别流线的纵坐标为24 122 m,相对误差为4%,如图6c.

以 $X=-10\ 000$ m时流线的纵坐标为参数,分析MODPATH模拟流线结果随 ΔX 变化特征.对比流线MODPATH模拟解与真实解,如图6d结果表明: $\Delta X \leq 50$ m时,流线识别结果可靠; $\Delta X > 50$ m时,流线识别结果严重偏离真实流线.

3 讨论

3.1 抽水井处水位校正与网格大小

当抽水井处水位与网格格点模拟水位相同时,无需再对抽水井处水位模拟结果进行校正.根据潜水含水层抽水井处水位校正公式(11), ΔX 与 r_w 满足关系式:

$$\ln \frac{\Delta X}{r_w} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad (19)$$

求得,

$$\Delta X = e^{\pi/2} r_w = 4.81 r_w. \quad (20)$$

这就是潜水含水层抽水井处水位校正与真实值一致的理论依据,也为中心网格有限差分法精确模拟三维地下水流动中抽水井处水位时,抽水井所在网格剖分精度提供了依据.

抽水井处水位校正精度受模拟精度直接影响,与模拟值偏大或偏小无关.抽水井周围网格局部加密区越大,网格尺寸越小,抽水井处水位模拟精度越高,相应的校正精度越高,如图7所示.

3.2 非均质与非稳定流潜水含水层抽水井处水位校正

式(10)与式(11)仅适用于一般矩形与正方形网格剖分的平面二维均质各向同性潜水含水层模型.推导式(10)与式(11)的核心在于潜水含水层有限差分模型求解的关键问题在于过水断面饱和带厚度的处理.在MODFLOW中,有且仅有隔水底板水平的均质各向同性含水层,中心网格有限差分方程将过水断面饱和带厚度处理成相邻两个格点处水位的平均值(Mcdonald and Harbaugh, 1988).本文中的潜水含水层抽水井处水位校正公式不适用于沿 X 或 Y 方向渗透系数呈现非均质性或隔水底板明显起伏的潜水含水层.

对于均值各向异性含水层, $K_x \neq K_y$,将 K_x 、 K_y 分别代入式(8)与(9),可得均值各向异性潜水含水层抽水井处水位校正公式为:

$$h_w^2 = h_{i,j}^2 - \frac{Q}{\pi} \frac{1}{K_y \Delta X^2 + K_x \Delta Y^2} \left(\Delta Y^2 \ln \left(\frac{\Delta X}{r_w} \right) + \Delta X^2 \ln \left(\frac{\Delta Y}{r_w} \right) - \pi \Delta X \Delta Y \right). \quad (21)$$

此外,本文抽水井处水位校正公式仅适用于中心网格有限差分法的平面二维均质潜水含水层抽水井处水位校正,对于其他有限差分求解法(如layer property flow)及非稳定流条件的适用性有待进

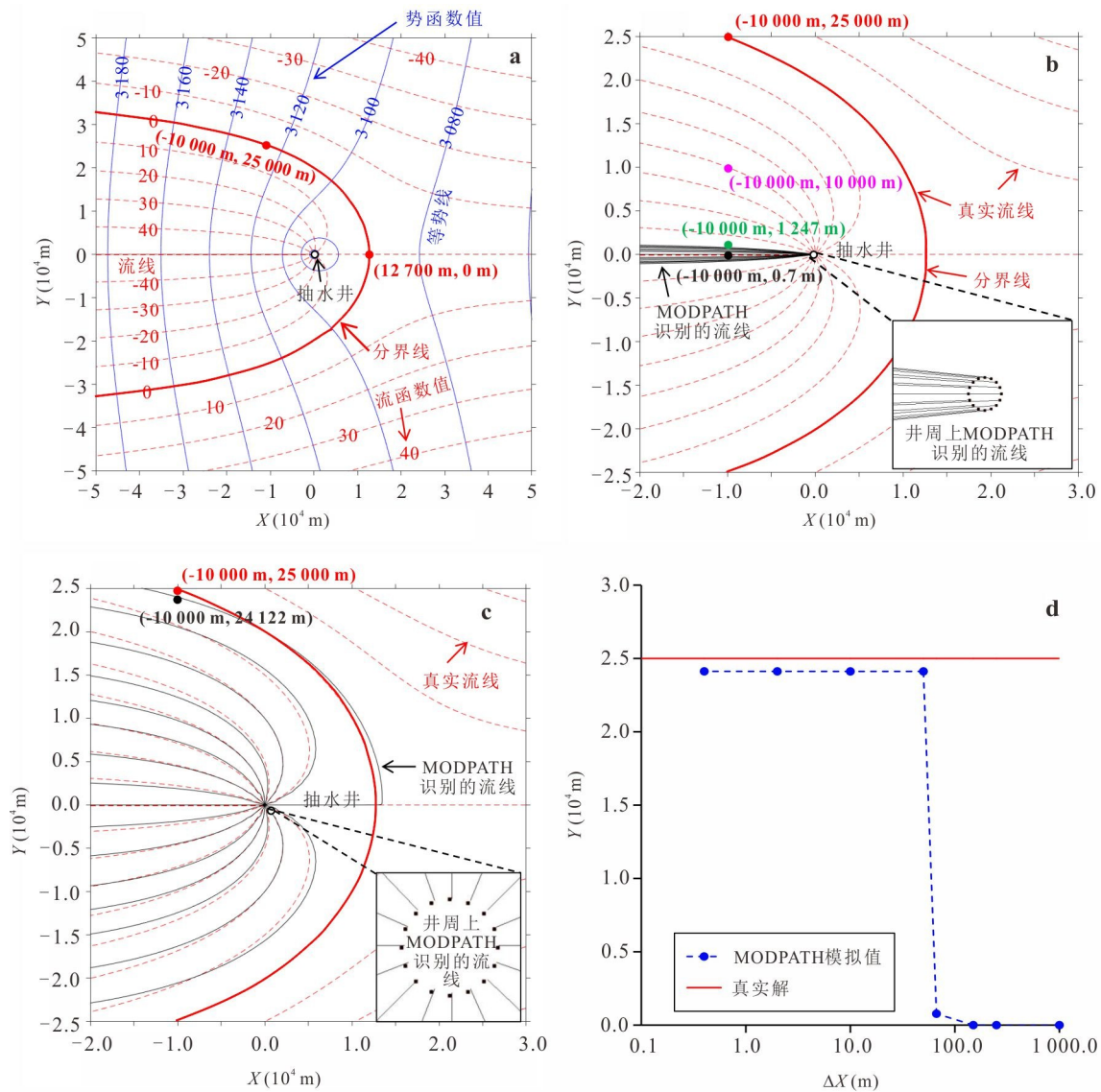


图 6 案例B的流线模拟结果

Fig.6 Streamline simulation results for case B

a. 流场真实解; b. $\Delta X=200$ m; c. $\Delta X=0.32$ m; d. $X=-10000$ m 时, 分界线纵坐标 Y 的模拟值与真实解对比

一步研究.

3.3 中心网格有限差分模型与 MODPATH 模型抽水井所在网格适宜大小

中心网格有限差分模型与 MODPATH 精确模拟结果的网格大小与抽水井井周半径关系不一致. 据抽水井处水位校正公式(式(10)或式(11)), 中心网格有限差分法模拟抽水井处精确水位, 网格大小 ΔX 与抽水井井周半径 r_w 满足关系 $\Delta X=4.81r_w$; 而 MODPATH 井周上粒子追踪起点分布规则(式(18))为: 网格大小 ΔX 与抽水井井周半径 r_w 满足关系 $\Delta X=4r_w$. 两者不一致的原因是抽水井处水位校正公式主要考虑的是修正网格剖分造成的模拟误

差, 未充分考虑有限差分法求解与模型边界刻画等误差因素.

据式(11), 抽水井处水位模拟值无需校正时的网格大小为 $4.81r_w$, 水位为:

$$h_{w1}^2 = h_{i,j}^2 - \frac{Q}{\pi K} \left(\ln(4.81) - \frac{\pi}{2} \right). \quad (22)$$

如果抽水井所在网格大小为 $4r_w$, 则有:

$$h_{w2}^2 = h_{i,j}^2 - \frac{Q}{\pi K} \left(\ln 4 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (23)$$

将网格大小为 $4r_w$ 时校正水位相对初始水位模拟误差控制在 0.1 内, 则水位平方相对误差约 0.01, 则有:

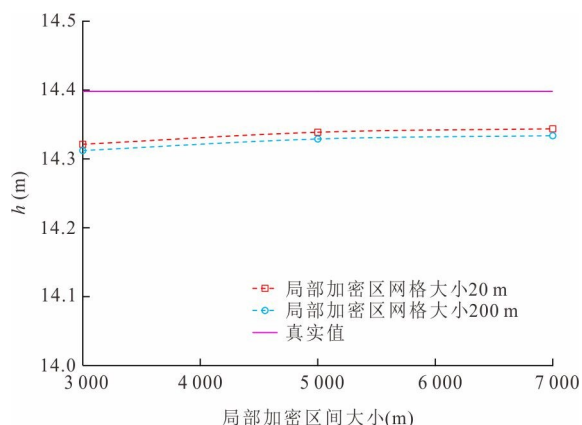


图7 抽水井所在网格周围不同局部加密区间与水位校正值

Fig.7 Water level correction values for local refinement around a pumping well

$$\frac{h_{w2}^2 - h_{w1}^2}{h_0^2} = \frac{0.1844Q}{\pi K h_0^2} \leq 0.01. \quad (24)$$

在实际应用中,若将抽水井所在网格大小加密至 $4.81r_w$,则无需再用水位校正公式(11);如果近似将抽水井所在网格大小剖分为 $4r_w$,相对误差控制在0.1内,则抽水井流量 Q 不宜超过 $0.054\pi K h_0^2$ 。对于 $K=1\text{ m/d}$ 、 $h_0=25\text{ m}$ 的案例, $Q \leq 106\text{ m}^3/\text{d}$ 。 $\Delta X=4r_w$ 与 $4.81r_w$ 时,MODPATH识别的流线精度基本一致,如图6d所示。

4 结论

本文基于复势函数等数学理论,推导了中心网格有限差分模型的潜水含水层抽水井处水位校正公式;识别了MODPATH中抽水井上粒子追踪起点按照椭圆分布,椭圆轴长等于抽水井所在网格长宽的一半,讨论了潜水含水层抽水井处水位校正公式的适用性,以及在GMS软件应用中精确模拟抽水井处水位与流线的方法,得到以下结论。

(1)本文提出的中心网格有限差分法抽水井处水位校正公式能系统性地将潜水含水层抽水井处水位误差从米级降至厘米级,其精度由局部网格尺度控制。

(2)研究确定当抽水井所在网格尺寸约为井半径的5倍时,可同时满足MODFLOW直接输出高精度水位与MODPATH精确追踪下游流线的要求,为建立可靠、高效的地下水流与运移模型提供了明确的实践指南。

References

- Bear, J., 1979. *Hydraulics of Ground Water*. McGraw-Hill Inc., New York.
- Campos, L. M. B. C., 2010. *Complex Analysis with Applications to Flows and Fields*. CRC Press, Boca Raton.
- Chen, C. X., Wang, X. S., Hu, L. T., 2007. Emendation of Drawdown in Pumping Wells for Numerical Modeling of Groundwater Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 38(4):481—485 (in Chinese with English abstract).
- Gang, S. T., Deng, Y. E., 2015. Comprehensive Summary of GMS Application for Groundwater Resource Evaluation and Management. *Ground Water*, 37(2): 33—36(in Chinese with English abstract).
- Lerner, D. N., 1989. Predicting Pumping Water Levels in Single and Multiple Wells Using Regional Groundwater Models. *Journal of Hydrology*, 105(1—2): 39—55. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(89\)90095-4](https://doi.org/10.1016/0022-1694(89)90095-4)
- Li, R. Y., 2022. Study on the Three-Dimensional Shape and Recharge Sources for Catchment Zone of a Pumping Well near Rivers (Dissertation). China University of Geosciences, Beijing (in Chinese with English abstract).
- Li, X., Su, S. L., Wen, Z., et al., 2022. Numerical Analysis of Estimating Groundwater Velocity through Single-Well Push-Pull Test. *Earth Science*, 47(2): 633—641(in Chinese with English abstract).
- MacMillan, G. J., Schumacher, J., 2015. Correction of Discretization Errors Simulated at Supply Wells. *Ground Water*, 53(4):651—657. <https://doi.org/10.1111/gwat.12254>
- Mcdonald, M. G., Harbaugh, A. W., 1988. A Modular Three-Dimensional Finite-Difference Ground-Water Flow Model. US Geological Survey, U.S.A., 83—875.
- Poeter, E., Hsieh, P., 2020. Graphical Construction of Groundwater Flow Nets. The Groundwater Project: Guelph, Ontario, Canada. <https://doi.org/10.21083/978-1-7770541-3-7>
- Pollock, D. W., 1988. Semianalytical Computation of Path Lines for Finite-Difference Models. *Groundwater*, 26(6): 743—750. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.1988.tb00425.x>
- Pollock, D. W., 2016. User Guide for MODPATH Version 7—A Particle Tracking Model for MODFLOW. Open-File Report 2016—1086. U. S. Geological Survey, Reston, VA. <https://doi.org/10.3133/ofr20161086>
- Prickett, T. A., 1967. Designing Pumped Well Characteristics into Electric Analog Models. *Groundwater*, 5(4):38—46. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.1967.tb01625.x>
- Ramadhan, M., 2015. A Semi-Analytical Particle Tracking Algorithm for Arbitrary Unstructured Grids. University of

- Waterloo, Waterloo.
- Strack, O. D., 1989. Groundwater Mechanics. Prentice - Hall, Englewood Cliffs.
- Su, S. L., Li, X., Guo, Q., et al., 2024. Effect Mechanistic of Partially Penetrating Well on Single - Well Push - Pull Tests for Groundwater Velocity Estimation. *Earth Science*, 49(1):288—298(in Chinese with English abstract).
- Wang, Y., Li, J., Xi, B. D., et al., 2018. Research on the Division Technology of Karst Groundwater Source Protection Areas Based on Numerical Simulation. *Carsologica Sinica*, 37(6): 799—809(in Chinese with English abstract).
- Wang, X. G., 2023. Experimental Study on Hydraulic Control and Remediation of Trichloroethylene Pollution in Single Well Pumping and Infiltration Groundwater (Dissertation). Hebei University of Engineering, Handan (in Chinese with English abstract).
- Wang, X. S., 2008. Revised Model for Finite-Difference Modeling of Flowing Artesian Wells. *Earth Science*, 33(1): 112—116(in Chinese with English abstract).
- Xia, Q., Wang, X. S., Lu, L. B., 2007. Characteristics of Error in Numerical Modeling of Well Flow with MODFLOW. *Geotechnical Investigation & Surveying*, 35(10):29—32, 37(in Chinese with English abstract).
- Yang, J. H., 2008. Comparative Analysis of Three Fundamental Numerical Computation Methods. *Science & Technology Information*, 35:19 (in Chinese).
- Zhang, S., Wang, X. S., Han, P. F., et al., 2024. New Particle Tracking Method for 2D Steady - State Groundwater Flow around Wells: A Modified Algorithm Using the Stream Function. *Journal of Hydrology*, 632: 130928. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2024.130928>
- ### 中文参考文献
- 陈崇希, 王旭升, 胡立堂, 2007. 地下水流数值模拟中抽水井水位的校正. 水利学报, 38(4):481—485.
- 刚什婷, 邓英尔, 2015. 基于GMS在地下水资源评价与管理中的应用综述. 地下水, 37(2):33—36.
- 李若怡, 2022. 傍河地下水开采井截获区的三维形态与补给来源研究(博士学位论文). 北京: 中国地质大学.
- 李旭, 苏世林, 文章, 等, 2022. 单井注抽试验测算地下水流速的数值分析. 地球科学, 47(2):633—641.
- 苏世林, 李旭, 郭强, 等, 2024. 非完整井对单井注抽试验测算地下水流速影响机理. 地球科学, 49(1):288—298.
- 汪洋, 李娟, 席北斗, 等, 2018. 基于数值模拟的岩溶地下水源保护区划分技术研究. 中国岩溶, 37(6):799—809.
- 王新港, 2023. 单井抽出一回渗地下水水力控制及对三氯乙烯污染修复实验研究(硕士学位论文). 邯郸: 河北工程大学.
- 王旭升, 2008. 自流井有限差分模拟的校正模型. 地球科学, 33(1):112—116.
- 夏强, 王旭升, 鲁林波, 2007. 利用MODFLOW模拟井流的误差特征. 工程勘察, 35(10):29—32, 37.
- 杨建宏, 2008. 三种基本数值计算方法的对比分析研究. 科技信息, 35:19.