doi:10.3799/dqkx.2025.118

基于近似贝叶斯计算的多道面波频散曲线概率反演方法

王轩毫[1,3]，曹子君[2*]，杜文琪[1,3]，李典庆[1,3]

1. 武汉大学水资源工程与调度全国重点实验室，湖北 武汉 430072；

2. 西南交通大学高速铁路线路工程教育部重点实验室，智慧城市与交通学院，四川 成都 611756；

3. 武汉大学工程风险与防灾研究所，湖北 武汉 430072；

摘要：贝叶斯反演方法常用于量化多道面波分析（MASW）频散曲线反演结果的不确定性。因为反演过程涉及高维非线性的地球物理模型和大量重复的频散曲线正演计算，基于传统数值方法的贝叶斯推断计算耗时且效率低。本文提出一种基于近似贝叶斯计算（ABC）的频散曲线反演方法，高效反演剪切波速（v_s）剖面。所提方法通过减少频散曲线正演的重复次数有效缩短计算耗时，同时结合子集模拟方法提升求解高维贝叶斯方程的效率。此外，所提方法能够确定 v_s 剖面最可能后验值，弥补了传统 ABC 方法在该方面的不足。本文采用模拟算例和工程实例验证了所提方法，说明了所提方法的高效性和合理性。本研究为地球物理数据的快速概率分析提供了参考。

关键词：多道面波分析；频散曲线反演；贝叶斯方法；不确定性量化

中图分类号：P631　　　　　　**收稿日期：**2025-04-20

Probabilistic inversion of multichannel surface wave dispersion curve based on Approximate Bayesian Computation

WANG Xuan-Hao[1,3], CAO Zi-Jun[2*], DU Wenqi[1,3], LI Dian-Qing[1,3]

1. State Key Laboratory of Water Resources Engineering and Management, Wuhan university, Wuhan, Hubei province, 430072;

2. MOE Key Laboratory of High-Speed Railway Engineering, Institute of Smart City and Intelligent Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan province 611756;

3. Institute of Engineering Risk and Disaster Prevention, Wuhan University, Wuhan, Hubei province, 430072;

Abstract: Bayesian inversion approaches are usually used to quantify the significant uncertainty in the inversion results of the Multichannel Analysis of Surface Waves (MASW) dispersion curve. Due to the high-dimensional nonlinear geophysical model and extensive repeated forward calculations for the dispersion

基金项目：国家自然科学基金项目（U2240211, 52278368），四川省自然科学基金（24NSFSC2017）
第一作者简介：王轩毫（1994—），男，博士研究生，研究方向为地震勘探数据处理、解释及不确定性表征. ORCID：0000-0002-0372-4683. E-mail：wangxuanhao@whu.edu.cn

curve, Bayesian inference based on conventional numerical methods is highly time-consuming and less efficient. The paper proposes a probabilistic inversion approach for dispersion curves based on the Approximate Bayesian Computation (ABC) to achieve efficient identification of shear wave velocity (v_s) profiles. It can reduce the number of forward calculations for the dispersion curve, thereby greatly decreasing the computing time for Bayesian inference. Additionally, the subset simulation is used to improve the efficiency in solving high-dimensional Bayesian equations. Furthermore, the proposed approach can determine the most probable posterior value of v_s profiles, addressing a shortcoming of traditional ABC methods. The proposed approach is demonstrated through both virtual and real-life sites. Results show that the proposed approach is reasonable and highly efficient. This study provides valuable insights for conducting rapid probabilistic analysis of geophysical data.

Key words: MASW; Dispersion curve inversion; Bayesian method; Uncertainty quantification

0 引言

多道面波分析（MASW）是一种非侵入式的地球物理方法，主要用于估计近地表岩土体剪切波速（v_s）。因其经济、灵活、可靠等特性，MASW 方法已被应用于岩土工程各领域，例如场地特征描述（孙旭等，2025）、液化问题分析（Ji et al., 2017）、地基无损检测（Comina et al., 2021；胡智等，2023）和滑坡稳定性评价（吕擎峰等，2015）。MASW 主要记录现场浅震试验波形数据，从数据中提取频散曲线，通过反演频散曲线估计 v_s 剖面（Foti et al., 2018）。由于测量误差、有限频带宽度等因素（Lai et al., 2005；Meju et al., 2009），频散曲线反演结果（即 v_s 剖面）存在较大不确定性。

频散曲线反演方法可分为确定性方（Xia et al., 1999；程飞等，2016）和概率方法（Bodin et al., 2012；付代光等，2015；Cho and Iwata, 2019）。确定性反演方法（如遗传算法和差分搜索算法）通常仅提供单一反演结果，无法量化反演结果不确定性。相对而言，概率反演方法可量化反演结果不确定性。其中，贝叶斯反演是最常用的概率反演方法，其关键在于计算频散曲线的似然函数。然而，由于频散曲线贝叶斯反演中通常涉及基于 v_s 剖面计算理论频散曲线的非线性正演模型，导致似然函数十分复杂，使得参数后验分布不存在解析解。

文献中提出了基于随机模拟方法计算后验分布的数值方法，例如马尔科夫链蒙特卡洛（Markov Chain Monte Carlo, MCMC）（付代光等，2015）、跨维马尔科夫链蒙特卡洛(reversible-jump Markov Chain Monte Carlo, RJMCMC）（Bodin et al., 2012）、哈密顿蒙特卡洛（Hamiltonian Monte Carlo, HMC）（Aleardi et al., 2020）等。在求解后验分布过程中，上述随机模拟方法需要大量重复计算似然函数。由于频散曲线的似然函数十分复杂，导致随机模拟方法计算耗时长。

针对该问题，本文提出基于近似贝叶斯计算（Approximate Bayesian Computation, ABC）的频散曲线概率反演方法，高效反演 v_s 剖面，并量化其不确定性。ABC 在复杂模型更新或逆问题中应用广泛，例如地质建模（Schaaf et al., 2021）、动态系统（Vakilzadeh et al., 2017；何庆等，2023）、生物科学（Liepe et al., 2014）和生态学（Beaumont, 2010）。此外，ABC 在地球物理领域也取得了若干最新应用进展，例如 Maalouf et al. (2021)采用深度生成模型结合 ABC 反演井间层析成像数据。ABC 源自拒绝采样原理(Chiachio et al., 2014)，首先给定一组不确定参数样本，并从似然函数中随机抽取一套数据（简称"模拟数据"），然后根据模拟数据和实际数据的相似性决定是否接受给定样本（Sisson et al., 2018）。然而，基于拒绝采样的 ABC 其从后验分布中采样效率较低(Chiachio et al., 2014)。此外，ABC 方法无法获得似然函数具体值，所以难以确定参数最大后验估计（MAP）。

为克服上述难点，本文结合了 ABC 和子集模拟（SubSim）技术（简记为"ABC-SubSim"），以高效地模拟频散曲线反演的后验分布样本。针对多道面波频散曲线反演问题，本文提出了度量模拟数据和观测数据相似性的半解析函数（L_F），ABC-SubSim 算法因此基于 L_F 值判断模拟数据和实际数据是否近似相等。所提 L_F 不但计算高效，而且能够用于估算后验样本的似然函数值，以此确定 v_s 剖面的后验最可能值。

本文首先介绍了频散曲线反演的研究背景，然后推导了相关贝叶斯方程，提出了度量模拟数据和观测数据相似性的函数（L_F），并简要介绍了 ABC-SubSim 算法，最后通过模拟算例和工程应用验证了所提方法。

1 研究背景

1.1 理论频散曲线

瑞雷波频散曲线（本文简称"频散曲线"）由不同频率（ f ）的理论相速度（c）组成，根据传播模态不同，可分为基本模态(M0)频散曲线，第一较高模态(M1)频散曲线，依此类推。在实际面波勘探中，获取 M0 频散曲线较为容易（Foti et al., 2018），因此本文主要使用 M0 频散曲线数据。如果有更高阶模态的频散曲线数据，也能用所提方法进行分析。

给定某一频率，分层地层模型（图 1）的频散函数（F）的根（或零点）即为理论相速度，如公式（1）所示（Xia et al., 1999）：

$$F\left(f, c, \underline{\boldsymbol{H}}_N, \underline{\boldsymbol{v}_s}_N, \underline{\boldsymbol{v}_p}_N, \underline{\boldsymbol{\rho}}_N\right) = 0 \tag{1}$$

其中，分层地层模型由 N-1 个不同厚度的水平均匀层堆叠在一个半无限空间层上组成，各层参数包括层厚（H），剪切波速度(v_s)、压缩波速度(v_p)和密度(ρ)。本文用 $\underline{\boldsymbol{H}}_N = \left[H_1, H_2, ..., H_{N-1}, Inf\right]^T$

表示所有层厚集合，下标代表对应层；$\underline{\boldsymbol{v}_s}_N$，$\underline{\boldsymbol{v}_p}_N$ 和 $\underline{\boldsymbol{\rho}}_N$ 与 $\underline{\boldsymbol{H}}_N$ 的形式类似。

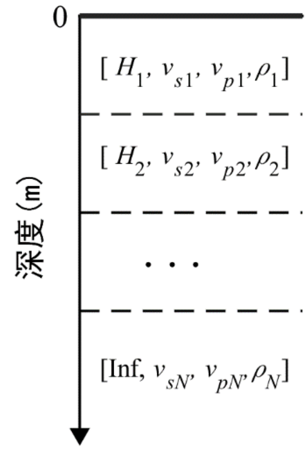


图 1 分层地层模型示意图

Fig.1 Layered subsurface model

目前文献中尚缺少解析地求解 F 零点的方法，因此实践中采用数值方法搜寻最接近 F 理论零点的相速度值，比如采用二分法连续改变可能的 c 直到 F 值改变符号来搜索（Xia et al., 1999；Schwab et al., 1972）。在频散曲线贝叶斯反演问题中，计算似然函数需要根据频散函数（公式（1））确定理论频散曲线。因为频散函数通常较复杂且无解析解，所以基于随机模拟方法求解后验分布会包含大量求根运算，导致求解过程非常耗时。

1.2 **观测频散曲线**

由于实践中存在各种限制，给定频率的观测相速度（d_{obs}）并不完全等于对应理论相速度(c)，因此观测频散曲线（$\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$）与理论频散曲线（$\underline{\boldsymbol{c}}$）之间的关系可表示如下：

$$\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} = \underline{\boldsymbol{c}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2}$$

其中 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} = \left[d_{obs,1}, d_{obs,2}, \ldots, d_{obs,j}, \ldots, d_{obs,N_f} \right]^T$，下标 j 代表不同频率的相速度；理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 以及误差向量 $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 类似。此外，$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的每个分量 ε_j 通常被假设服从均值为 0 的高斯分布，各分量独立同分布（Yuen and Yang, 2020）。

根据 Xia 等（1999），频散曲线对分层地层模型中各类参数的敏感程度不同，对剪切波速度(v_s)最为敏感，层厚（H）次之；对压缩波速度(v_p)和密度(ρ）相对不敏感。因此，一般的频散曲线反演主要估计 v_s 和 H。v_p 可通过给定的泊松比 ν 估算（Lei et al., 2019）：

$$v_p = v_s\sqrt{\frac{1-\nu}{0.5-\nu}} \tag{3}$$

ρ 则假设为已知并根据岩土材料性质确定。此外，根据文献[9,25]本文假设地层的层数 N 已知，层数 N 可依据先前勘探数据、工程经验等指定。

2 频散曲线贝叶斯反演

2.1 贝叶斯方程

本研究中待反演分层地层模型参数包括层厚（H）和剪切波速（v_s），用符号 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N = \left[\underline{\boldsymbol{H}}_N, \underline{\boldsymbol{v_s}}_N\right]$ 表示。当给定观测频散曲线 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 和层数 N 时，$\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的不确定性可通过条件概率 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}, N)$ 量化。在贝叶斯框架下 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}, N)$ 被称为后验分布，可表达为：

$$p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}, N) = \frac{p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid \underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)\, p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid N)}{P(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid N)} \tag{4}$$

其中 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid \underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)$ 被称为似然函数，代表了具有模型参数 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的分层地层模型对观测频散曲线 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的拟合程度。 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid N)$ 是 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的先验分布。 $P(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid N) = \int p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid \underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)\, p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid N)\, d\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 是归一化常数。

频散曲线贝叶斯反演的关键在于求解后验分布 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}, N)$，基于后验分布不仅可以量化 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$（或对应 v_s 剖面）的不确定性，而且能够确定 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的最大后验估计（MAP）。在求解后验分布之前，本文先介绍先验分布和似然函数的表达式。

2.2 先验分布

模型参数 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 由 $\underline{\boldsymbol{H}}_N$ 和 $\underline{\boldsymbol{v_s}}_N$ 两部分组成，根据条件概率公式，

$$p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N \mid N) = p(\underline{\boldsymbol{v_s}}_N \mid \underline{\boldsymbol{H}}_N, N)\, p(\underline{\boldsymbol{H}}_N \mid N) \tag{5}$$

其中，$p(\underline{\boldsymbol{H}}_N \mid N)$ 是给定 N 时 $\underline{\boldsymbol{H}}_N$ 的先验分布，$p(\underline{\boldsymbol{v_s}}_N \mid \underline{\boldsymbol{H}}_N, N)$ 是给定 N 和 $\underline{\boldsymbol{H}}_N$ 时 $\underline{\boldsymbol{v_s}}_N$ 的先验分布。对于分层地层模型，$\underline{\boldsymbol{H}}_N$ 通常被假设服从标准狄利克雷分布（Steininger et al., 2013）：

$$p(\underline{\boldsymbol{H}}_N \mid N) = \frac{\Gamma(N)}{[H_{\max} - (N-1)H_{\min}]^{N-1}} \tag{6}$$

其中，$H_{\max}$ 是可识别 v_s 分界面的最大深度；$H_{\min}$ 是 v_s 剖面上可识别最小层厚。根据 Vantassel 和 Cox（2021），$H_{\max} \approx d_{obs,f_{\min}} / \left(k_1 \times f_{\min}\right)$ 和 $H_{\min} \approx d_{obs,f_{\max}} / \left(k_2 \times f_{\max}\right)$。其中，$f_{\min}$ 指观测频散曲线 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 上最小频率，$d_{obs,f_{\min}}$ 是对应观测相速度；$f_{\max}$ 和 $d_{obs,f_{\max}}$ 同理；k_1 和 k_2 是常数，一般取值为

1/3~1/2。

假定各层剪切波速 v_{si} 相互独立，并将 v_{si} 设置为截断高斯分布：

$$p(v_{si} \mid \underline{\boldsymbol{H}}_N, N) = k_3 \sigma_i^{-1} e^{-\frac{\left(v_{si}-\mu_{si}\right)^2}{2\sigma_i^2}} \tag{7}$$

其中，μ_{si} 是第 i 层 v_{si} 均值。本文采用 Haney 和 Tsai（2017）所提方法估计 μ_{si}，首先使用 Haney 和 Tsai 的方法从基模态频散曲线中直接估算一个先验 v_s 剖面（v_s 值在深度上连续变化），然后给定一组层厚 $\underline{\boldsymbol{H}}_N$ 并计算各层对应深度范围内 v_s 的均值，将该均值作为 v_s 先验均值（Cho and Iwata，2019； Wang et al., 2025）。σ_i 是 v_{si} 的标准差且 $\sigma_i = CV \times \mu_{si}$，其中 CV 是 v_{si} 的变异系数。$k_3 = \left(\sqrt{2\pi}\left(\Phi(v_{si,\max}) - \Phi(v_{si,\min})\right)\right)^{-1}$，其中 Φ 是高斯分布 $N(\mu_{si}, \sigma_i^2)$ 的累计概率密度函数（CDF），$v_{si,\max}$ 和 $v_{si,\min}$ 分别是 v_{si} 可能取值的上下界。本文令 $v_{si,\max} = \mu_{si} + \Delta v_s$，$v_{si,\min} = \mu_{si} - \Delta v_s$，$\Delta v_s$ 根据岩土体类型确定。假设不同层的 v_{si} 相互独立，

$$p(\underline{\boldsymbol{v}}_s \mid \underline{\boldsymbol{H}}_N, N) = \prod_{i=1}^{N} p(v_{si} \mid \underline{\boldsymbol{H}}_N, N) \tag{8}$$

2.3 似然函数

在 1.2 节提到，实践中通常假定观测相速度与理论相速度的误差 ε 服从高斯分布，而且不同频率下的误差 ε 独立同分布。根据公式（2），观测频散曲线 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 服从多元高斯分布

$$p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid \sigma^2, \underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\left(d_{obs,j} - c_j\right)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{9}$$

其中 N_f 表示组成观测频散曲线 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的观测相速度数目。σ^2 是频率 f_j 的 $d_{obs,j}$ 与对应 c_j 之间误差 ε_j 的方差，其值未知。本文目标是反演模型参数 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$，因此考虑通过积分方式消除公式（9）中 σ^2，以此得到似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid \underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)$ 表达式。

本文假设方差 σ^2 为随机变量并服从 Inverse-Gamma 分布，即 $\sigma^{-2} \sim Gam(a,b)$，其概率密度函数表达式为：

$$p(\sigma^2) = \frac{\left(\sigma^{-2}\right)^{a-1} e^{\left(-\frac{1}{b}\sigma^{-2}\right)}}{b^a \Gamma(a)} \tag{10}$$

其中，a 和 b 分别为 Inverse-Gamma 分布的形状参数和尺度参数。根据全概率公式，似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)$ 可表示成如下积分形式：

$$p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)=\int p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\sigma^{-2},\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)p(\sigma^{-2}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)d\sigma^2 \tag{11}$$

其中，因为方差 σ^2 与模型参数 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 和层数 N 无关，所以 $p(\sigma^2|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)=p(\sigma^2)$。将公式（9）和（10）代入公式（11）可得（Vakilzadeh et al., 2017）：

$$p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)=k\left(1+\frac{1}{n}\frac{(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{c}})^T(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{c}})}{\delta^2}\right)^{-\frac{n+N_f}{2}} \tag{12}$$

其中，$k=(n\pi)^{-N_f/2}\frac{\Gamma(n/2+N_f/2)}{\Gamma(n/2)}\delta^{-1}$，$n=2a$，$\delta^2=\frac{1}{ab}$。公式（12）表明似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)$ 是一个 N_f 维的 Student-t 分布，即 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\sim T(\underline{\boldsymbol{c}},\delta^2\mathrm{I}_{N_f},n)$。

3 近似贝叶斯计算

基于公式（12）可知，计算频散曲线的似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)$ 需要计算理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}$，所以后验样本模拟涉及大量求根运算，导致基于随机模拟方法的计算效率低。

为此本文提出了基于近似贝叶斯计算（ABC）的频散曲线贝叶斯反演方法。因为当给定一组可能的模型参数 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$，似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)$ 正比于从分布 $p(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)$ 中随机抽取的随机变量实现，即模拟数据 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$，等于观测数据 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的概率（Sisson et al., 2018）。所以 ABC 方法根据 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 是否相等决定接受或拒绝 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 为后验样本，从而避免计算似然函数值（Sisson et al., 2018）。ABC 方法求解 $\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs},\underline{\boldsymbol{\theta}}_N\right)$ 的联合后验分布：

$$p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N)=\frac{p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})p(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N|N)}{P_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|N)} \tag{13}$$

其中，$p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 是 ABC 方法对应的似然函数，$p(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,N)p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N|N)$ 是 $\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs},\underline{\boldsymbol{\theta}}_N\right)$ 的先验分布。实际中，$\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}=\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的情况几乎不可能出现，除非 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 取值有限（Sisson et al., 2018）。ABC 做了近似，即将等式 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}=\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 替换为 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}\approx\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$，通过某种测度 L 量化 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的相似程度并引入一个容差参数 h（Chiachio et al., 2014）。因此，ABC 将似然函数定义为指示函数的形式，即

$p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} \mid \tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}) = I\left(L\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs} - \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\right) \le h\right)$。容差参数 h 的设置应遵循如下依据：一方面，h 需足够小，以确保近似后验分布具有较高精度；另一方面，与该后验分布相关的目标变量估计值（如参数的后验方差等）应具有稳定性（Beaumont, 2009）。综上，ABC 方法从 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 的联合后验分布 $p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N, \tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs} \mid \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}, N)$ 中采样，将后验样本的分量 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 作为 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}_N} \mid \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}, N)$ 的近似后验样本。

3.1 距离测度函数推导

根据上述分析，ABC 方法的关键在于度量 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 之间相似性，即 $L\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs} - \underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\right)$。本文采用欧几里得距离度量 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的相似性（Sisson et al., 2018）：

$$L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} - \tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}) = \sqrt{\frac{1}{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}(d_{obs,j} - \tilde{d}_{obs,j})^2} \tag{14}$$

其中，$\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 表示从其先验分布 $p(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs} \mid \underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)$ 中随机模拟的一组数据，$\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs} \sim T(\underline{\boldsymbol{c}}, \delta^2 \mathrm{I}_{N_f}, n)$。根据公式（2），$\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 又等于理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 与随机误差的模拟样本 $\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 之和，即 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs} = \underline{\boldsymbol{c}} + \tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$，将其代入公式（14）可得

$$L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} - \tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}) = \sqrt{\frac{1}{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}(d_{obs,j} - \tilde{\varepsilon}_j - c_j)^2} \tag{15}$$

其中，根据公式（12）$\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 服从均值为 0 的 Student-t 分布，即 $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim T(0, \delta^2 \mathrm{I}_{N_f}, n)$。因此，采用公式（14）或（15）度量 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 相似性需要计算 $\underline{\boldsymbol{c}}$。

为了避免 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 的计算，本文推导了基于频散函数 F 估算 $L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs} - \tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 的公式，用 $\hat{L}$ 表示估算值。具体推导过程如下：假设以理论相速度 c_j 为中心的小邻域内 F 线性变化（本假设适用性将通过后文模拟算例验证），则 F 可简化为相速度（记为 c_{test} 以区别 c_j）的线性函数形式，即 $F \approx m c_{\text{test}} + d$，其中 m 和 d 为线性函数斜率和截距；将 $c_{\text{test}} = c_j$ 和 $c_{\text{test}} = (d_{obs,j} - \tilde{\varepsilon}_j)$ 代入该线性函数，并进行适当代数变换可得 $d_{obs,j} - \tilde{\varepsilon}_j - c_j \approx F(d_{obs,j} - \tilde{\varepsilon}_j)/m - F(c_j)/m$。基于上述近似线性假设，$m$ 可通过频散函数对 c_{test} 的一阶偏导数（记为 F'）估算，因此 $m \approx F'(d_{obs,j} - \tilde{\varepsilon}_j) \approx F'(c_j)$。最后，将将 m 的

估算值以及 $d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j-c_j$ 的相关表达式入公式（25）可得：

$$L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})\approx\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})=\sqrt{\frac{1}{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}\left[\frac{F\left(d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j\right)}{F'\left(d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j\right)}-\frac{F(c_j)}{F'(c_j)}\right]^2} \tag{16}$$

公式（16）假设以理论相速度 c_j 为中心的小邻域内 F 线性变化。由于 c_j 是频散函数 F 的零点，$F(c_j)=0$，$\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 可以简化为：

$$\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})=\sqrt{\frac{1}{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}\left[\frac{F\left(d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j\right)}{F'\left(d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j\right)}\right]^2} \tag{17}$$

因为上式不含理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}$，所以采用 $\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 度量 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 之间相似性能够避免 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 的计算。此外，由于 F 有解析表达式且 F' 可通过一阶导数的前向差分公式快速计算，所以公式（17）的计算效率非常高。本文中使用蔡伟等（2017）所提改进传递矩阵法构建 F，缓解高频区域 F 值数值溢出问题，确保一阶导数计算结果的准确性。

1.1 节中已经说明给定频率 f_j 时 F 的零点或者理论相速度 c_j 并不唯一，按对应模态分别表示为 $c_j^{M0},c_j^{M1},...,c_j^{Mt},...,c_j^{MT}$，因此 $\frac{F(c_j^{Mt})}{F'(c_j^{Mt})}=0$。当 $\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})\le h$ 时，观测频散曲线 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$（默认模态是 M0）可能会与任意模态（Mt）理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}^{Mt}$ 吻合。因为 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}=\underline{\boldsymbol{c}}^{Mt}+\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$，所以 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 的模态为 Mt，与对应 $\underline{\boldsymbol{c}}^{Mt}$ 一致。将 $\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})\le h$ 作为接受 $\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs},\underline{\boldsymbol{\theta}_N}\right)$ 为后验样本的条件，无法确保 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 模态一致，导致一部分反演结果不合实际。

为了缓解该问题，本文将 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 分成两个子集 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}$，集合大小分别为 N_f^{sub1} 和 N_f^{sub2}（$N_f^{sub1}<<N_f^{sub2}$）。分别与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}$ 对应的 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$，$\underline{\boldsymbol{c}}$ 以及 $\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 也用上标“sub1”和“sub2”区分，后续不再特别说明。分别将 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}$ 代入公式（15）和（17），并令新距离测度 $L_F(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 等于 $L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1})$ 和 $\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub2})$ 的加权平均值：

$$L_F(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})=\frac{1}{N_f}\left[N_f^{sub1}L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1})+N_f^{sub2}\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub2})\right] \tag{18}$$

其中，$L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1})$ 既可以量化 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1}$ 相似程度，也能确保 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 模态一致。简单证明如下，当 $L_F(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})\le h$ 时，必有 $L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1})<h$，所以 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}\approx\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1}$ 且两者模态相同；本文假设 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub2}$ 模态总保持一致，所以 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$，$\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub2}$ 三者的模态相同，或者说 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 模态相同，将在后文中进一步说明 $L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1})$ 的作用。

综上，本文使用 $L_F(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 度量 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 之间距离，即两者相似程度。ABC 方法求解后验分布时，试算一个候选样本 $\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs},\underline{\boldsymbol{\theta}}_N\right)$，只需要计算 N_f^{sub1} 个理论相速度点，从而能够有效减少频散函数求根次数，缩短 ABC 方法的耗时。

3.2 ABC-SubSim 算法

基于似然函数 $p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\,|\,\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 的定义，从后验分布 $p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}\,|\,\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N)$ 中采样等价于从 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的邻域 $\Re_h\equiv\left\{\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}\,|\,L_F\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\right)\le h\right\}$ 中采样。为了 ABC 结果能够更准确地近似后验分布 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N\,|\,\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N)$，$h$ 应足够小。此时，从 $\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs},\underline{\boldsymbol{\theta}}_N\right)$ 的先验分布中随机抽取的样本落入 $\Re_h$ 中将是一个小概率事件（Vakilzadeh et al., 2017）。为了提高采样效率，Chiachio 等（2014）将用于小概率事件采样的子集模拟（SubSim）算法（Au 和 Beck，2001）与 ABC 合并，提出了“ABC-SubSim”算法。本文因此使用 ABC-SubSim 算法从后验分布 $p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N,\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}\,|\,\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N)$ 中采样。

ABC-SubSim 算法将从 $\Re_h$ 采样问题转化为从一系列中间失效域采样的问题，中间失效域记为 $\Re_h^t\equiv\left\{\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}\,|\,L_F\left(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\right)\le h^t\right\}$，其中 $h^1=+\infty>h^2>\cdots h^T=h$。$P(\Re_h)$ 等于一系列条件失效概率的乘积，即 $P(\Re_h)=P(\Re_h^1)\prod_{t=2}^{T}P(\Re_h^t\,|\,\Re_h^{t-1})$。虽然目标事件的概率 $P(\Re_h)$ 可能较小，但 ABC-SubSim 算法可通过选择适当中间失效域 $\Re_h^t$ 来避免模拟小概率事件 Chiachio 等（2014）。在执行过程中，ABC-SubSim 算法将 $P(\Re_h^t\,|\,\Re_h^{t-1})$ 设置为固定值 p_0，并据此自适应地选择容差序列 h^t。文献（Au and Beck, 2001；Chiachio et al., 2014）建议 p_0 取值为 0.1~0.2。除了子集模拟第一层，

ABC-SubSim 算法在后续各层均采用 MCMC 方法对中间失效域中的样本进行抽样，从而高效地逼近目标后验分布。

3.3 基于 ABC 的最大后验估计

接下来，本文将进一步推导估算频散曲线似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)$ 的公式，以此确定 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的最大后验估计（MAP）和 v_s 剖面的后验最可能值。首先，本文对公式（12）中需要代入 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 计算的部分，即 $(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{c}})^T(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{c}})$，进行适当变形：

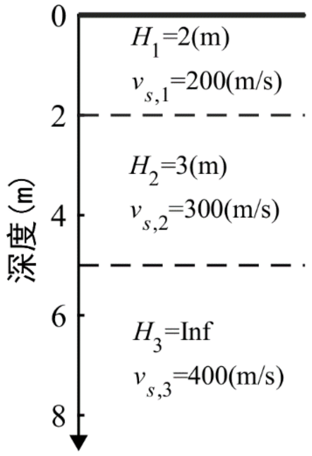
$$
\begin{aligned}
(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{c}})^T(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\underline{\boldsymbol{c}}) &= \sum_{j=1}^{N_f}(d_{obs,j}-c_j)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N_f^{sub1}}\left[d_{obs,j}^{sub1}-c_j^{sub1}\right]^2+\sum_{j=1}^{N_f^{sub2}}\left[\left(d_{obs,j}^{sub2}-\tilde{\varepsilon}_j\right)-c_j+\tilde{\varepsilon}_j\right]^2 \\
&\approx (\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1}-\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1})^T(\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1}-\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1})+\sum_{j=1}^{N_f^{sub2}}\left[\frac{F\left(d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j\right)}{F'\left(d_{obs,j}-\tilde{\varepsilon}_j\right)}+\tilde{\varepsilon}_j\right]^2
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中，$L_F(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 以及 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$ 和 $\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ 在获得 $\left(\underline{\boldsymbol{\theta}}_N, \tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}\right)$ 的后验样本时也同时被获得。然后，将公式（19）代入公式（12）即可快速估算频散曲线的似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}|\underline{\boldsymbol{\theta}}_N, N)$ 值。最后，由于 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 近似后验样本对应先验分布和似然函数均已知，根据公式（4）可以确定 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_N$ 的后验最可能值（MAP），从而得到最可能的 v_s 剖面。

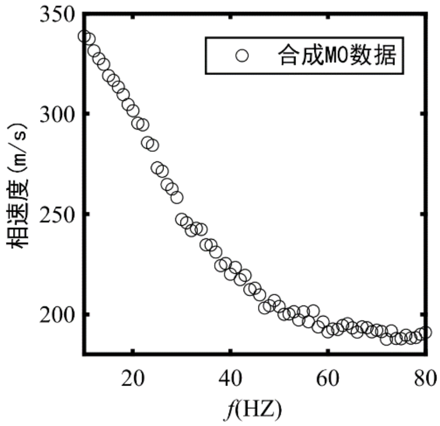
4 模拟算例

4.1 基模态数据

本文首先采用一个模拟算例验证所提 ABC 方法的准确性和合理性。假设一处具有如图 2a 所示分层地层（Profile 1）的虚拟岩土工程场地，岩土体密度为 $\rho = 2000\,\text{kg/m}^3$，泊松比为 $\nu = 0.3$。本文基于公式（2）合成了该场地的频散曲线，其中 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 由改进传递矩阵法求得（蔡伟等，2017），$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的每个分量 ε_j 均假设服从高斯分布 $N(0, 2.5^2)$。具体地，从频率 $f = 10\,\text{Hz}$ 到 80Hz，每隔 1Hz 模拟一个观测相速度，将共计 N_f=71 个观测相速度按频率升序排列构成一组合成频散数据（曲线）$\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$，如图 2b 所示。接着，$\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 被分成两个互斥子集 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}=\left[d_{obs,1}, d_{obs,44}, d_{obs,71}\right]$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}=\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\setminus\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$，以便计算 L_F。



a 虚拟场地地层剖面（Profile 1）



b 合成 M0 频散数据

图 2 虚拟场地的信息

Fig.2 Information of the virtual site

以图 2 所示虚线地层（Profile 1）为例，图 3 展示了给定 f=30Hz 下频散函数 F 随可能相速度 c_{test} 变化的图像，曲线图中标记了 F 的两个零点，分别对应于基模态和第一较高模态理论相速度 c^{M0} 和 c^{M1}（上标为模态）。为了验证低、中、高频区域频散函数图像是否符合“在理论相速度邻域内近似线性”的假设（见公式 16），图 4 绘制了 f=12Hz、30Hz、60Hz 三个频率下，以 c^{M0} 或 c^{M1} 为中心的小邻域范围（即 $\left[c^{\text{M0 or M1}}-10, c^{\text{M0 or M1}}+10\right]$m/s）内，$F/F'$ 随着 c_{test} 变化的图像（实线）。同时，本文将其与 $c_{\text{test}}-c^{\text{M0 or M1}}$ 随 c_{test} 变化的图像（虚线）进行对比。如果近似线性假设成立，那么 F/F' 和 $c_{\text{test}}-c^{\text{M0 or M1}}$ 的图像在同邻域内高度吻合。为了对结果进行定量分析，本文进一步计算了多个 c_{test} 点位下的 F/F' 和 $c_{\text{test}}-c^{\text{M0 or M1}}$ 相对残差的平局值（记为 RelErr）。如图 4 所示，在低频和中频区域，实线与虚线几乎完全重合，且对应 RelErr 均小于 7%，验证了在该频带范围内，频散函数图像满足近似线性假设。相比之下，在高频区域（f=60Hz），实线和虚线整体趋势仍较一致，但在远离 c^{M0} 或 c^{M1} 位置时出现明显数值偏差，导致 RelErr 分别达到 36.9%或 40.4%。以上结果说明，在当前所设定 c^{M0} 或 c^{M1} 的小领域内，频散函数在高频区域不再完全满足近似线性假设。尽管如此，考虑到在各频段内 F/F' 与 c_{test}（也相当于 $c_{\text{test}}-c^{\text{M0 or M1}}$）变化趋势整体仍呈线性比例关系，本文认为以 F/F' 值度量模拟和观察相速度之间的相似性（即相速度之差）仍然具有合理性与物理意义。

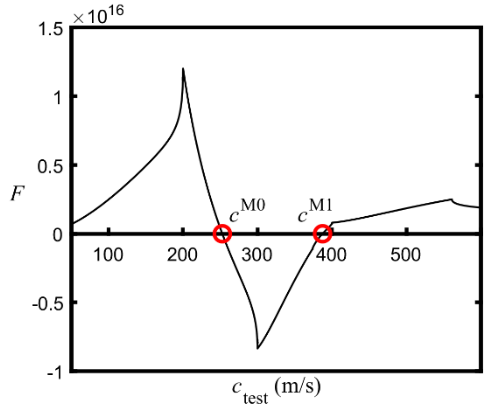


图 3 Profile 1 的频散函数 F 图像（f=30Hz）

Fig. 3 Graphs of dispersion function F for profile 1 at f=30Hz

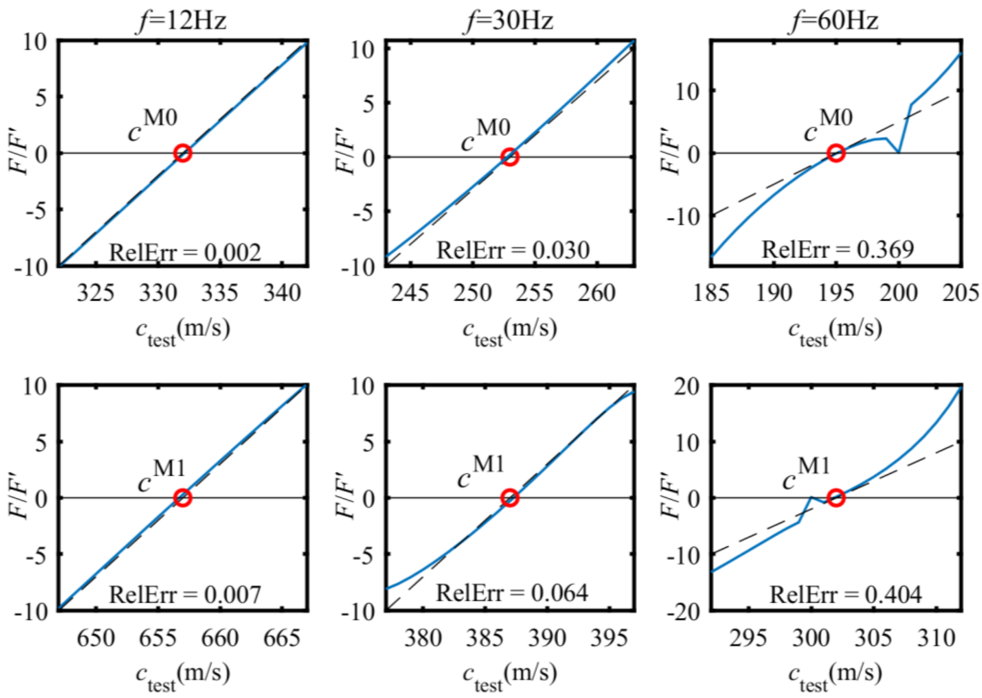
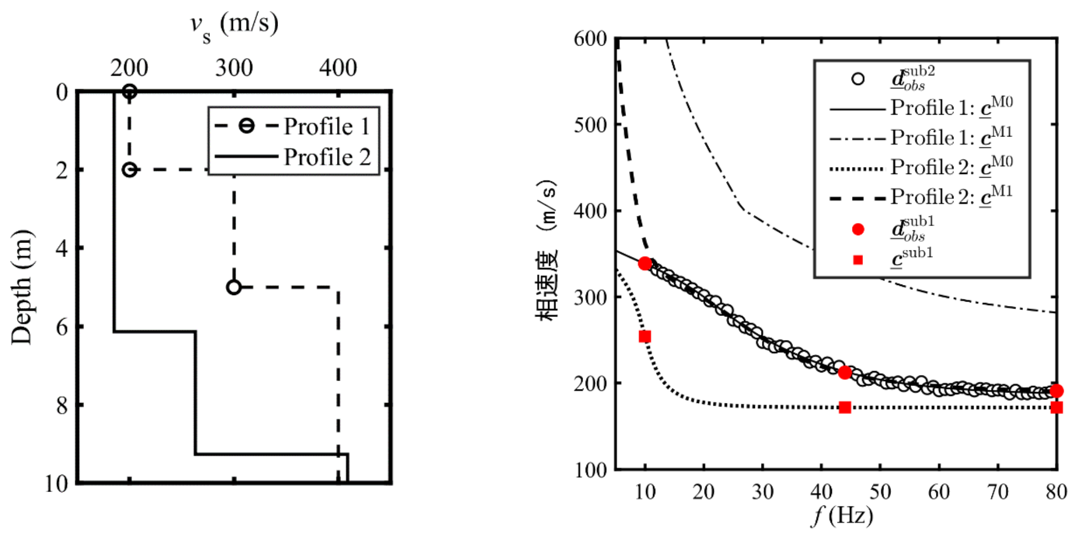


图 4 低中高频区域 F/F'（实线）或 $c_{\mathrm{test}}-c^{\mathrm{M0\ or\ M1}}$（虚线）与 c_{test} 的图像

Fig. 4 Graphs of F/F' (solid lines) or $c_{\mathrm{test}}-c^{\mathrm{M0\ or\ M1}}$ (dashed lines) versus c_{test}

图 5 展示了距离测度 L_F 如何保证 ABC 方法获得的 $\underline{\tilde{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 后验样本与合成频散数据 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 的模态（M0）一致。图 4（a）中“Profile 1”为所假设虚拟岩土工程场地的地层剖面，“Profile 2”是另一个可能的地层剖面。本文将 Profile 1 作为合理反演结果的例子，即其 M0 理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}^{M0}$ 与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$

吻合，因此对应 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 后验样本的模态与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 一致；而将 Profile 2 作为不合理反演结果的例子，即其非 M0 理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}^{Mt}$（$t$>0）与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 吻合，因此对应 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 后验样本的模态与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 不一致。图 4（b）显示了 Profile 1 的 $\underline{\boldsymbol{c}}^{M0}$ 和 Profile 2 的 $\underline{\boldsymbol{c}}^{M1}$ 均与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$（空心圆）吻合，所以仅使用 $\hat{L}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs})$ 无法区分 Profile 1 和 Profile 2。但是图 4（b）还显示了 Profile 2 的 M0 理论频散曲线的子集 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$（实心方块）与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$（实心圆）之间存在明显差异。因为 L_F 中 $L(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}-\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}^{sub1})$ 的值能反映 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$ 与 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 之间差异，所以使用 L_F 可以区分 Profile 1 和 Profile 2，排除不合理反演结果。



a 地层剖面“Profile 1”和“Profile 2”　　　　b 两个剖面的理论频散曲线与合成频散数据

图 5 符合合成频散数据的地层剖面举例

Fig. 5 Examples of stratigraphic sections that fit the synthetic dispersion data well

假设该虚拟场地的地层层数已知，即 N=3，不确定模型参数为 $\underline{\boldsymbol{H}}_3=[H_1,H_2]$ 和 $\underline{\boldsymbol{v}}_{s3}=[v_{s,1},v_{s,2},v_{s,3}]$。求解 $\underline{\boldsymbol{H}}_3$ 和 $\underline{\boldsymbol{v}}_{s3}$ 的后验分布前，需要为模型参数的先验分布和似然函数中的未知数指定先验值。根据 Vantassel 和 Cox（2021），本文将 k_1 和 k_2 分别设置为 1/2 和 1/3，再将 k_1 和 k_2 代入公式（6）计算可得 H 的先验分布中 $H_{\max}$=16.94m 和 $H_{\min}$=0.8m；本文根据 Haney 和 Tsai（2017）所提方法计算 v_{si} 的均值 μ_{si}，令 $v_{si,\max}=\mu_{si}+\Delta v_s$ 和 $v_{si,\min}=\mu_{si}-\Delta v_s$，并 Δv_s 设置为 100m/s；同时本文将 v_{si} 变异系数 CV 设置为 0.4 以减少其先验分布的主观性。由于似然函数的值对 Gamma 分布的形状参数 a 和尺度参数 b 并不敏感（Vakilzadeh et al., 2017），本文将 a 和 b 直接指定为 1 和 0.2。

基于上述先验信息，本文使用所提方法求解后验分布 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_3|\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N=3)$ 的近似解，其中容差参数 h=3.25。本文还采用基于结构可靠性方法的贝叶斯更新（Bayesian Updating with Structural Reliability Methods, BUS），并结合子集模拟（Subset Simulation, SuS）估计了后验分布 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_3|\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N=3)$，该方法简称为“BUS_SuS”。考虑到 SuS 在分析高维不确定参数和极小概率事件方面的优越性，BUS_SuS 适合需要学习高维不确定参数的贝叶斯推理问题（Betz et al., 2018；Cao et al., 2019），例如频散曲线概率反演。本文进一步引入其改进版本 aBUS，以自适应选择频散曲线数据似然函数最大值。为了比较的公平性，上述两种方法采用了相同的参数设置，即子集模拟的中间失效概率 $p_0=0.1$ 和每层采样数为 10000。图 6 不仅展示了 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_3=\left[\underline{\boldsymbol{H}}_3,\underline{\boldsymbol{v}}_{s_3}\right]$ 的近似后验样本和概率密度直方图，还给出了基于 aBUS 算法所得后验样本拟合的 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_3$ 各分量的概率密度图像 PDF（红色实线）。对比 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_3$ 各分量（即 H_1，H_2，$v_{s,1}$，$v_{s,2}$，$v_{s,3}$）的 PDF 与概率密度直方图可以发现 aBUS 和所提 ABC 方法的结果较为一致，说明了所提方法获得的后验分布近似解相对准确且合理。

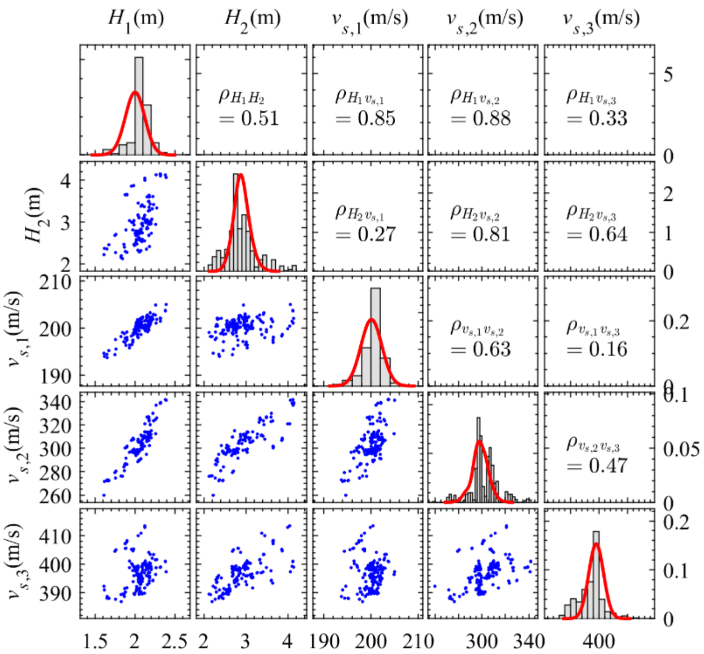
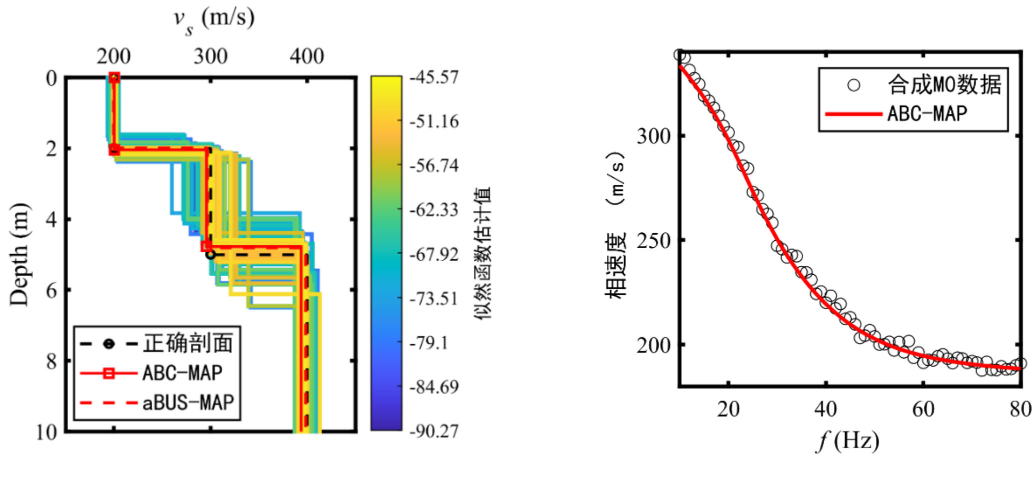


图 6 虚拟场地的不确定参数后验样本和概率密度直方图

Fig. 6Posterior samples of uncertain parameters for the virtual site and corresponding probability density histograms

图 7a 展示了 v_s 剖面后验样本（实线），同时将公式（19）的值代入公式（12）计算了似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_3|\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N=3)$ 的近似估计值。根据似然函数估计值，$\underline{\boldsymbol{\theta}}_3$ 的近似后验最可能值（ABC-MAP）

被确定，如图 7a 中方块实线所示。为了方便比较，本文同时基于 aBUS 算法确定了 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_3$ 的 MAP（aBUS-MAP），如图 7a 中虚线所示。对比 ABC-MAP、aBUS-MAP 和该虚拟场地的实际 v_s 剖面（圆圈实线）可以发现三者基本重合，验证了所提方法得到的 v_s 剖面。图 7b 中对比了给定 ABC-MAP 时计算得到的理论频散曲线与合成频散数据，两者一致，进一步验证了所提方法。



a 虚拟场地 v_s 剖面的后验样本　　　　b 合成频散数据与 ABC-MAP 的理论频散曲线

图 7 合成频散数据的反演结果

Fig.7 Inversion results of the synthetic dispersion data

表 1 对比了 aBUS 和 ABC 的计算时间和调用频散函数 F 的次数。因为每次试算候选样本所提方法需计算 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$ 的维度等于 N_f^{sub1}（即 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 的维度，本算例中 $N_f^{sub1}=3$）；而 aBUS 算法需要计算整条理论频散曲线 $\underline{\boldsymbol{c}}$（$\underline{\boldsymbol{c}}$ 的维度 $N_f=71$）。所以 aBUS 算法调用频散函数 F 总次数远大于所提方法。相较于 aBUS 算法，所提方法的计算时间缩短了 14.8 倍，计算效率显著提高。

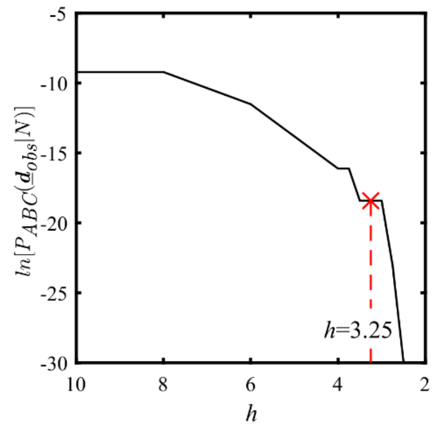
表 1 所提方法和 aBUS 算法在虚拟场地的计算效率对比

Table 1 Comparison of computation efficiency between the proposed approach and aBUS algorithm at the virtual site

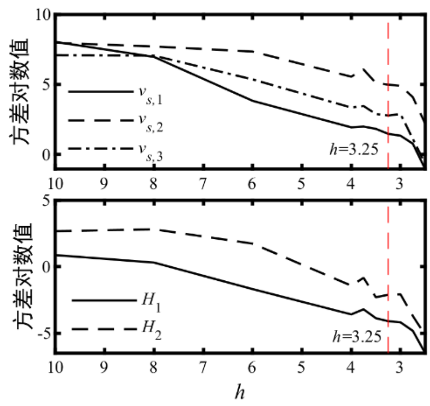
	$\underline{\boldsymbol{c}}$ 或者 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$ 的维度	调用 F 总次数	时间(s)
aBUS 算法	71	4.53×10^8	1853
所提方法	3	2.06×10^7	128
比值	23.67	21.98	14.48

此外，本文还开展了关于容差参数 h 的敏感性分析，旨在探讨不同 h 对反演结果的影响。当 h 从 10 减少至 2，图 7a 显示了模拟样本 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 落入失效域 $\mathfrak{R}_h$ 的概率随 h 变化的曲线。此概率与 $p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\,|\,N)$ 成正比，可通过子集模拟估算（Chiachio et al., 2014）。结果表明，当 h<3.25，

$\ln[p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\,|\,N)]$ 迅速降低，$p_{ABC}(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\,|\,N)$ 趋近于零，表明模拟样本 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 落入失效域 $\Re_h$ 的可能性显著降低，从而导致难以从 $\Re_h$ 中采样（即后验分布估计变得困难）。图 7b 展示了模型参数后验方差对数值随 h 变化的曲线，当 h<3.25，各参数的方差对数值均呈现出迅速下降的趋势。此现象可通过图 7a 的观察结果解释：ABC-SubSim 算法依赖 MCMC 从子集模拟构建的中间失效域中抽样，随着中间失效域的容差 h^t 逐渐减小（如 $h^t < 3.25$），模拟样本 $\tilde{\underline{\boldsymbol{d}}}_{obs}$ 落入失效域 $\Re_h^t$ 可能性迅速减小，导致 MCMC 样本接受率降低，有效样本数量减少，进而影响模型参数后验方差估计的准确性。因此，h 值过小会降低基于 ABC 方法得到的后验估计量的精度。



a 模拟样本落入 $\Re_h$ 的概率



b 模型参数后验方差

图 8 容差参数对反演结果影响

Fig. 8 Effects of the tolerance parameter on inversion results

4.2 多模态数据

4.1 节的算例仅考虑了基模态（M0）数据，为了验证所提方法对多模态数据的适用性，本文进一步向该组基模态数据中添加第一较高模态（M1）数据，以模拟多模态数据混合情况（即 M0 和 M1 混合）。如图 9 中方块标记的数据点所示，本节遵循 4.1 节中生成模拟数据的方法，从频率 $f=30$ Hz 到 80Hz，每隔 1Hz 模拟一个 M1 观测相速度。M0 和 M1 数据点共计 N_f=122，以此构成一个混合模态数据集 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$。然后，本文将 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 拆分成两个互斥子集 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}=\left[d_{obs,1},d_{obs,44},d_{obs,71}\right]$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}=\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\setminus\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$，假定 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}$ 仅包含 3 个 M0 数据点，而 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}$ 中数据点的模态数未知，以此验证所提方法。

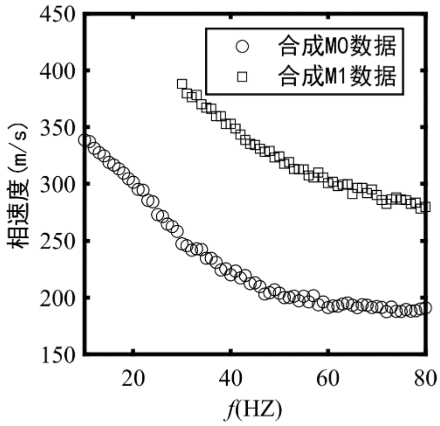


图 9 合成多模态频散数据

Fig.9 Synthetic multimodal dispersion data

考虑与 4.1 节相同的先验信息，本文使用所提方法反演了多模态频散曲线数据，其中容差参数 h 仍取 3.25。反演结果如图 10 所示，图中散点表示模型参数的近似后验样本；柱状图表示统计近似后验样本所得各参数的边缘后验概率；虚线代表由 aBUS 算法所得参数边缘后验 PDF，本文将其与所提方法结果进行对比；实线代表基于 M0 频散曲线数据的反演结果（见图 6）。各参数边缘后验概率直方图和 aBUS 算法结果（虚线）基本一致，验证了所提方法对多模态数据的适用性。反演多模态数据所得参数 $v_{s,2}$ 的 PDF（虚线）或直方图比反演 M0 数据结果（实线）更窄，说明考虑多模态数据能有效提高特定深度范围（与 M1 数据频带宽度有关）v_s 剖面可识别性。图 11a 显示了 ABC-MAP、aBUS-MAP 和实际 v_s 剖面基本重合，而且图 11b 也显示给定 ABC-MAP 计算所得理论 M0 和 M1 频散曲线分别与对应模态数据拟合，进一步说明了所提方法的适用性。表 2 对比了 aBUS 和 ABC 分析多模态数据所用时间和调用频散函数 F 的次数。相较于 aBUS 算法，所提方法的计算时间缩短了近 10 倍，计算效率显著提高。

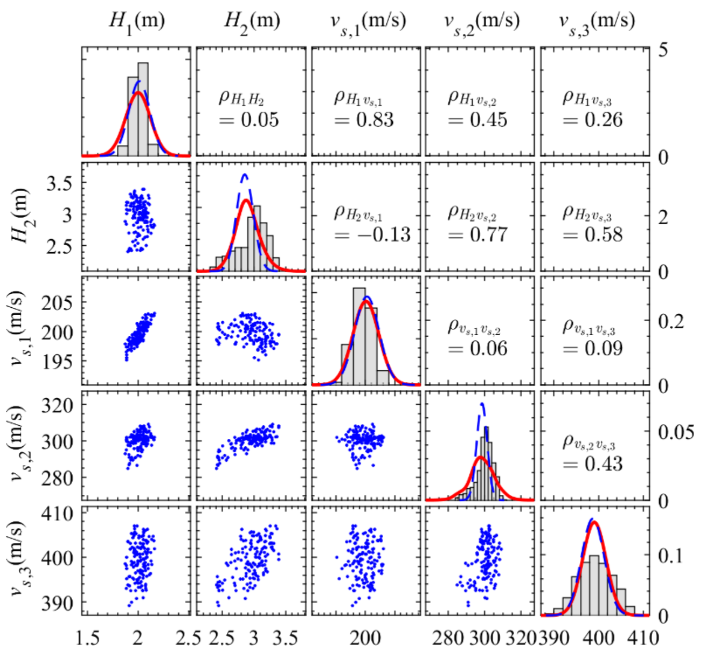
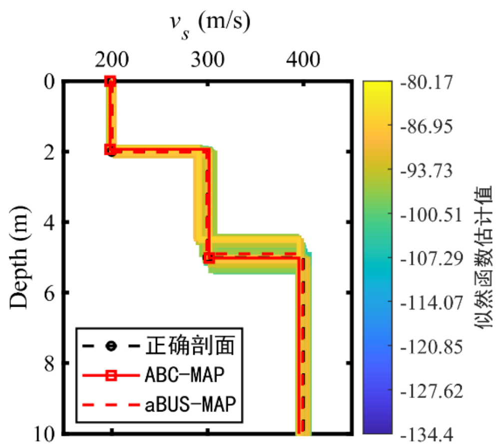
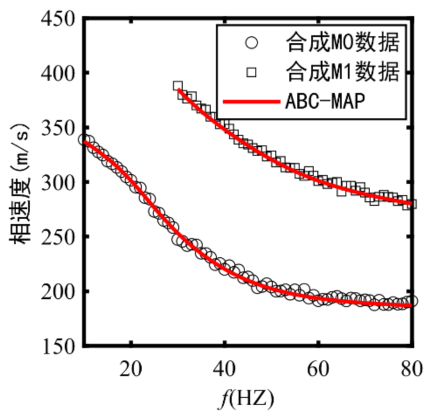


图 10 反演多模态数据所得不确定参数后验样本和概率密度直方图

Fig. 10 Posterior samples of uncertain parameters and corresponding probability density histograms obtained by inverting multimodal data



a 多模态数据的 v_s 剖面后验样本



b 多模频散数据与 ABC-MAP 的理论频散曲线

图 11 多模态频散数据的反演结果

Fig.11 Inversion results of multimodal dispersion data

表 2 所提方法和 aBUS 算法分析多模态数据的效率

Table 1 Computation efficiency of the proposed approach and aBUS algorithm for inverting multimodal data

	$\underline{\boldsymbol{c}}$ 或者 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$ 的维度	调用 F 总次数	时间(s)
aBUS 算法	122	5.54×10^{8}	2300
所提方法	3	3.88×10^{7}	236
比值	40.67	14.25	9.74

5 工程应用

为了进一步说明所提方法，本文使用所提方法分析了一组真实场地的频散曲线，该数据由 Xia 等（2002）在美国怀俄明州的 MASW 测试中获得，如图 12 所示。将观测频散数据 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}$ 分成两个互斥子集 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub1}=\left[d_{obs,1},d_{obs,9},d_{obs,17}\right]$ 和 $\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}^{sub2}$ 用于计算 L_F。该场地岩土体材料密度 ρ 已知（Xia et al., 2002），即 ρ =2000kg/m^3，泊松比 ν 仍取为 0.3。根据场地实际情况，假设所反演的 v_s 剖面具有 3 层（即 N=3），不确定模型参数为 $\underline{\boldsymbol{H}}_3=[H_1,H_2]$ 和 $\underline{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{s}}}_3=[v_{s,1},v_{s,2},v_{s,3}]$。该工程应用中模型参数先验信息与上一节类似，不再赘述。

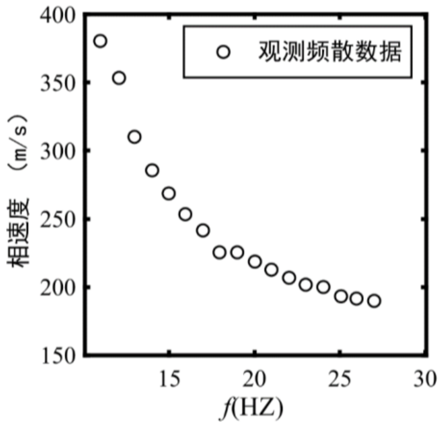


图 12 观测频散数据（引自 Xia 等（2002））

Fig. 12 Observed dispersion data

基于以上信息，本文使用所提方法求解后验分布 $p(\underline{\boldsymbol{\theta}}_3\,|\,\underline{\boldsymbol{d}}_{obs},N=3)$ 的近似解，其中容差参数 h=3.63。所提方法和 aBUS 算法采用相同的子集模拟参数设置，即 $p_0=0.1$ 和每层模拟样本数为 10000。图 13 展示了 $\underline{\boldsymbol{\theta}}_3$ 的近似后验样本和其概率密度直方图，$\underline{\boldsymbol{\theta}}_3$ 各分量的概率密度直方图与基

于 aBUS 算法结果得到的 PDF（红色实线）匹配较好，说明所提方法仍能获得相对准确的后验分布。图 14a 展示了 v_s 剖面的后验样本和对应似然函数 $p(\underline{\boldsymbol{d}}_{obs}\,|\,\underline{\boldsymbol{\theta}}_3, N=3)$ 的估计值。本研究发现所提方法确定的 v_s 剖面的 ABC-MAP 与 aBUS-MAP 吻合，而且 ABC-MAP 和 Xia 等（2002）报道的基于确定性方法反演结果（三角实线）以及由悬挂 P-S 测井记录（Suspension P-S Logging）（简称 P-S 记录）得到的 v_s 测量结果（圆圈实线）三者随深度变化趋势一致。图 14b 显示了给定 ABC-MAP 时计算得到的理论频散曲线与观测频散数据拟合良好，该拟合效果可由图 14c 所示相对残差分布进一步验证：在所有频率点上，理论值与实测值之间的相对残差均小于 4%。进一步验证了所提方法在实际应用中的有效性。

最后，本文对比了所提方法与 aBUS 算法的效率。如表 3 所示，所提方法在工程应用中仍然具有较高计算效率。基于模拟算例和工程应用，本文通过对比 aBUS 算法，验证了方法的高效性；未来可进一步开展与其他贝叶斯反演方法的计算效率对比研究，以更全面展示方法优势。

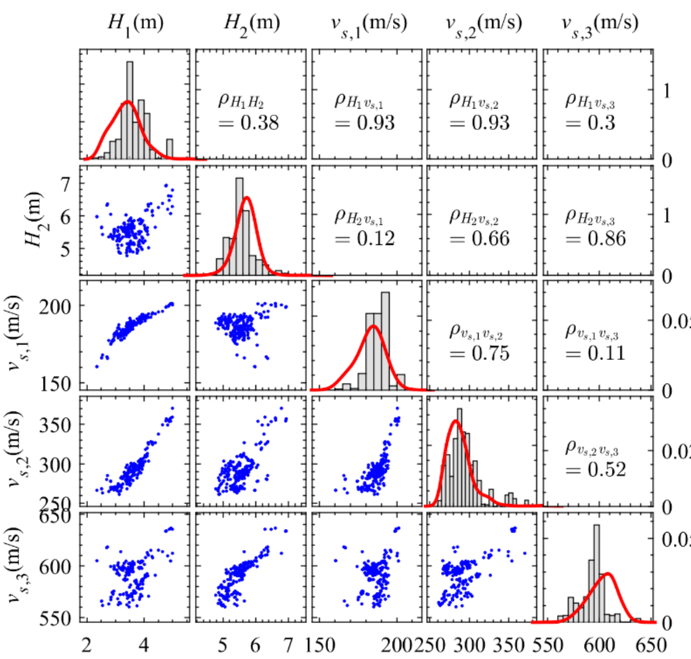
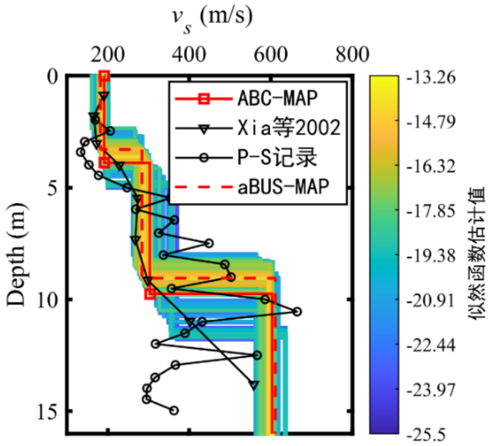
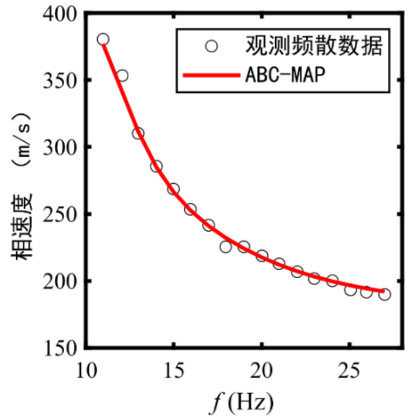


图 13 实际场地不确定参数的后验样本和概率密度直方图

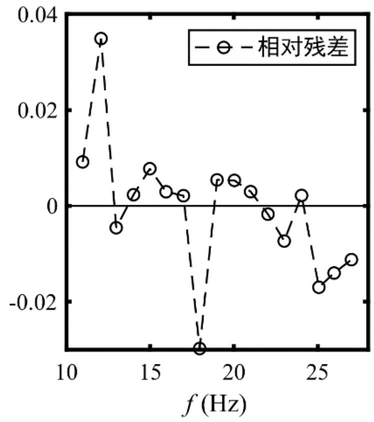
Fig. 13 Posterior samples of uncertain parameters for the real-life site and corresponding probability density histograms



a 实际场地 v_s 剖面的后验样本



b 观测频散数据与 ABC-MAP 的理论频散曲线



c 观测与理论值的相对残差

图 14 观测频散数据的反演结果

Fig.14 Inversion results of the observed dispersion data

表 4 工程应用中所提方法和 aBUS 算法计算效率对比

Table 2 Comparison of computation efficiency between the proposed approach and aBUS

	$\underline{\boldsymbol{c}}$ 或者 $\underline{\boldsymbol{c}}^{sub1}$ 的维度	调用 F 总次数	时间(s)
aBUS 方法	17	6.63×10^7	308
所提方法	3	1.41×10^7	117
比值	5.67	4.71	2.63

6 结论

本文提出了一种基于近似贝叶斯计算（ABC）的多道面波频散曲线概率反演方法，量化 v_s 剖面反演结果的不确定性，并使用模拟算例和工程案例说明了所提方法，主要结论如下：

（1）所提方法相较于其他基于随机模拟的数值方法更加高效。本文推导了量化模拟数据和实际数据相似程度的距离测度 L_F，基于 ABC 算法和所提 L_F 极大减少了贝叶斯方程求解过程中频散函数求根运算次数，其他数值方法不具备该优势。同时，本文使用了子集模拟采样，克服了频散曲线反演问题中小概率事件采样的困难，进一步提高了所提方法的效率。

（2）所提方法解决了传统 ABC 算法难以获得 v_s 剖面的后验最可能值的问题。基于所提距离测度 L_F，本文能够快速估算后验 v_s 剖面对应似然函数的值，并确定 v_s 剖面的后验最可能值，为岩土工程勘察中地球物理数据的快速概率分析提供了有效参考。

（3）所提方法可用于反演多模态的面波频散数据。实际工程中，经常会面临无法区分频散曲线不同模态的情况，可能导致传统反演方法的结果不准确。然而，所提方法仅需已知部分数据点（如基模态数据点）的模态数，即可反演 v_s 剖面，而无需确定剩余数据点的模态数。由于篇幅有限，将在后续研究中通过更多实际算例证明方法。

7 作者贡献度说明

王轩毫：负责核心数据分析及论文初稿撰写；曹子君：提出科学问题，并提供关键性技术指导和基金支持；杜文琪：负责理论框架优化、提供学术建议；李典庆：提供研究资源及终稿审阅。

参考文献

Aleardi, M., Salusti, A., Pierini, S., 2020. Transdimensional and Hamiltonian Monte Carlo Inversions of Rayleigh‐Wave Dispersion Curves: a Comparison on Synthetic Datasets. Near Surface Geophysics, 18(5): 515-543.

Au, S. K., Beck, J. L., 2001. Estimation of Small Failure Probabilities in High Dimensions by Subset Simulation. Probabilistic engineering mechanics, 16(4): 263-277.

Beaumont, M. A., 2010. Approximate Bayesian Computation in Evolution and Ecology. Annual review of ecology, evolution, and systematics, 41(1): 379-406.

Beaumont, M. A., Cornuet, J. M., Marin, J. M., et al., 2009. Adaptive Approximate Bayesian Computation. Biometrika, 96(4): 983-990.

Betz, W., Papaioannou, I., Beck, J. L., et al., 2018. Bayesian Inference with Subset Simulation: Strategies and Improvements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 331: 72-93.

Bodin, T., Sambridge, M., Tkalčić, H., et al., 2012. Transdimensional Inversion of Receiver Functions and Surface Wave Dispersion. Journal of geophysical research: solid earth, 117(B2).

Cao, Z. J., Zheng, S., Li, D. Q., et al., 2019. Bayesian Identification of Soil Stratigraphy Based on Soil Behaviour Type Index. Canadian Geotechnical Journal, 56(4): 570-586.

Chiachio, M., Beck, J. L., Chiachio, J., et al., 2014. Approximate Bayesian Computation by Subset Simulation. SIAM Journal on Scientific Computing, 36(3): A1339-A1358.

Cho, I., Iwata, T., 2019. A Bayesian Approach to Microtremor Array Methods for Estimating Shallow S Wave Velocity Structures: Identifying Structural Singularities. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 124(1): 527-553.

Comina, C., Mandrone, G., Arato, A., et al., 2021. Preliminary Analyses of an Innovative Soil Improving System by Sand/Gravel Injections–Geotechnical and Geophysical Characterization of a First Test Site. Engineering Geology, 293: 106278.

Foti, S., Hollender, F., Garofalo, F., et al., 2018. Guidelines for the Good Practice of Surface Wave Analysis: A Product of the Interpacific Project. Bulletin of Earthquake Engineering, 16: 2367-2420.

Haney, M. M., Tsai, V. C., 2017. Perturbational and Nonperturbational Inversion of Rayleigh-Wave Velocities. Geophysics, 82(3): F15-F28.

Ji, Y., Seo, H., Kang, S., et al., 2022. Masw-Based Shear Wave Velocities for Predicting Liquefaction-Induced Sand Boils Caused by the 2017 m5. 4 Pohang, South Korea Earthquake. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 148(4): 04022004.

Lai, C. G., Foti, S., Rix, G. J., et al., 2005. Propagation of Data Uncertainty in Surface Wave Inversion. Journal of Environmental & Engineering Geophysics, 10(2): 219-228.

Lei, Y., Shen, H., Li, X., et al., 2019. Inversion of Rayleigh Wave Dispersion Curves via Adaptive GA and Nested DLS. Geophysical Journal International, 218(1): 547-559.

Liepe, J., Kirk, P., Filippi, S., et al., 2014. A Framework for Parameter Estimation and Model Selection from Experimental Data in Systems Biology Using Approximate Bayesian Computation. Nature protocols, 9(2): 439-456.

Maalouf, E., Ginsbourger, D., Linde, N., 2021. Fast ABC with Joint Generative Modelling and Subset Simulation. In: International Conference on Machine Learning, Optimization, and Data Science (pp. 413-429). Cham: Springer International Publishing.

Meju, M. A., 2009. Regularized Extremal Bounds Analysis (Reba): An Approach to Quantifying Uncertainty in Nonlinear Geophysical Inverse Problems. Geophysical Research Letters, 36(3).

Schaaf, A., de la Varga, M., Wellmann, F., 2021. Constraining Stochastic 3-D Structural Geological Models with Topology Information Using Approximate Bayesian Computation in Gempy 2.1. Geoscientific Model Development, 14(6), 3899-3913.

Schwab, F. A., Knopoff, L., 1972. Fast Surface Wave and Free Mode Computations. In: Methods in computational physics: Advances in research and applications (Vol. 11, pp. 87-180). Elsevier.

Sisson, S. A., Fan, Y., Beaumont, M., 2018. Handbook of Approximate Bayesian Computation. CRC press.

Steininger, G., Dettmer, J., Dosso, S. E., 2013. Trans-Dimensional Joint Inversion of Seabed Scattering and Reflection Data. The Journal of the Acoustical Society of America, 133(3): 1347-1357.

Vakilzadeh, M. K., Huang, Y., Beck, J. L., 2017. Approximate Bayesian Computation by Subset Simulation Using Hierarchical State-space Models. Mechanical Systems and Signal Processing, 84: 2-20.

Vantassel, J. P., Cox, B. R., 2021. SWinvert: a Workflow for Performing Rigorous 1-D Surface Wave Inversions. Geophysical Journal International, 224(2): 1141-1156.

Wang, X. H., Cao, Z. J., Wu, T., 2025. Probabilistic Inversion of Shear Wave Velocity Profile Based on the Dispersion Curve from Multichannel Analysis of Surface Waves and Inequality Constraints on Layer Thicknesses. Engineering Geology, 352: 108063.

Xia, J., Miller, R. D., Park, C. B., 1999. Estimation of Near-Surface Shear-Wave Velocity by Inversion of Rayleigh Waves. Geophysics, 64(3): 691-700.

Xia, J., Miller, R. D., Park, C. B., 2002. Comparing Shear-Wave Velocity Profiles Inverted from Multichannel Surface Wave with Borehole Measurements. Soil dynamics and earthquake engineering, 22(3): 181-190.

Yuen, K. V., Yang, X. H., 2020. Bayesian Rayleigh Wave Inversion with an Unknown Number of Layers. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 19: 875-886.

蔡伟, 宋先海, 袁士川, 等, 2017. 新的瑞雷波多模式频散曲线反演目标函数. 地球科学, 42(09): 1608-1622.

Cai, W., Song, X. H., Yuan, S. C., et al., 2017. A New Misfit Function for Multimode Dispersion Curve Inversion of Rayleigh Waves. Earth Science, 42(09): 1608-1622 (in Chinese with English abstract).

程飞, 刘江平, 毛茂, 等, 2016. 参数自适应差分演化算法在面波频散曲线反演中的应用. 岩土工程学报, 38(1): 147-154.

Cheng, F, Liu, J. P., Mao, M., et al., 2016. Self-adapting Control Parameters-Based Differential Evolution Algorithm for Inversion of Rayleigh Wave Dispersion Curves. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 38(1): 147-154 (in Chinese with English abstract).

付代光, 刘江平, 周黎明, 等, 2015. 基于贝叶斯理论的软夹层多模式瑞雷波频散曲线反演研究. 岩土工程学报, 37(2): 321-329.

Fu, D. G., Liu, J. P., Zhou, L. M., et al., 2015. Inversion of Multimode Rayleigh-Wave Dispersion Curves of Soft Interlayer Based on Bayesian Theory. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 37(2): 321-329 192 (in Chinese with English abstract).

何庆, 利璐, 李晨钟, 等, 2023. 基于 Kriging 模型的在役高速列车悬挂参数近似贝叶斯估计. 机械工程学报, 59(12): 139-148.

He, Q., Li, L., Li, C. Z., et al., 2023. Approximate Bayesian Estimation of Suspension Parameters of In-service High-speed

Trains Based on Kriging Surrogate Model. Journal of Mechanical Engineering, 59(12): 139-148 192 (in Chinese with English abstract).

胡智, 尹方东, 王金昌, 等, 2023. 基于瞬态面波法的道路地下病害无损探测技术应用. 岩土工程学报, 45(S1): 189-192.

Hu, Z., Yin, D. F., Wang, J. C., et al., 2023. Application of Non-destructive Detection Technology to Underground Diseases of Roads Based on Transient Surface Wave Method. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 45(S1): 189-192 (in Chinese with English abstract).

吕擎峰, 卜思敏, 王生新, 等, 2015. 综合物探法在滑坡稳定性评价中的应用研究. 岩土工程学报, 37(zk1): 142-147.

Lyu, Q. F., Pu, S. M., Wang, S. X., et al., 2015. Application of Comprehensive Geophysical Prospecting Method in Stability Evaluation of Landslide. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 37(zk1): 142-147 (in Chinese with English abstract).

孙旭, 张学强, 刘博政, 2025. 利用面波横向高分辨技术探测低速地质异常体. 地球科学, 50(5): 1875-1883.

Sun, X., Zhang, X. Q., Liu, B. Z., 2025. Detection of Low Velocity Geological Anomalous Body Using Surface Wave Transverse High Resolution Technology. Earth Science, 50(5): 1875-1883 (in Chinese with English abstract).