

# 随机介质模型的模拟与混合型随机介质

奚先<sup>1</sup>, 姚姚<sup>2</sup>

(1. 中国地质大学数理系, 湖北武汉 430074; 2. 中国地质大学地球物理系, 湖北武汉 430074)

**摘要:** 讨论了随机介质模型的基本概念及指数型和 Gaussian 椭圆自相关函数所描述的随机介质模型的特点, 并提出了混合型随机介质模型的概念, 该随机介质模型能更加灵活、准确地描述实际介质. 通过选择在水平方向和垂直方向上的自相关长度  $a$ 、 $b$  以及粗糙度  $r$ , 可以产生出各种不同形式的混合型随机介质模型. 模拟结果显示, 混合型随机介质模型能更加灵活地描述实际介质, 具有适应性强, 使用方便、灵活, 能有效地模拟油气藏细节的优点.

**关键词:** 随机介质模型; 椭圆自相关函数; 粗糙度; 混合型随机介质模型.

**中图分类号:** TE121.1<sup>+</sup>5 **文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-2383(2002)01-0067-05

**作者简介:** 奚先(1964—), 男, 副教授, 1989年硕士毕业于华中师范大学数学系应用统计专业, 现在在职攻读地球探测与信息技术专业博士学位, 研究方向为地震勘探.

关于随机介质模型, 国外学者已进行了许多理论研究. 例如 Ikelle 等<sup>[1]</sup>、Ergintav 等<sup>[2]</sup> 分别以指数型及 Gaussian 自相关函数为例进行了二维随机介质模型的正演模拟, 并给出了一些模拟结果, 但并未对其算法进行完整的论述.

## 1 随机介质模型的基本概念

在古典的波传播问题中, 地壳往往被模拟为一系列厚的均匀层. 人工地震记录来自这些简化模型, 忽略了在实际地震数据中常常看到的大量小的不相干扰动. 然而在小尺度上速度和密度的扰动, 直至微孔和裂隙, 已知是广泛存在于地壳之中的, 并通过向所有方向上散射入射波的能量, 造成大量小的不相干的波至(这些波至被称为波尾, 出现在主要的反射和折射之间). 对于介质中大量的、随机分布的小尺度异常, 可以用统计的方法来描述, 这就是随机介质模型. 随机介质模型由大、小二种尺度的非均匀性所组成. 大尺度上的非均匀性描述介质的平均特性, 即传统意义上的地质模型; 而小尺度上的非均匀性是加在上述平均值上的随机扰动. 使用一个均值为零

的平稳的空间随机过程来表示介质在小尺度上的非均匀性. 这样介质的弹性参数在小尺度上的空间扰动就可以用很少的几个统计量来描述, 它们是: 空间自相关函数、相关长度、均值及标准差等.

以二维声波随机介质为例, 在空间坐标点  $(x, z)$  处的速度  $v(x, z)$  可分解为:

$$v(x, z) = v_0 + \delta v(x, z), \quad (1)$$

其中:  $v_0$  为大尺度非均匀介质参数, 假设为常数或随空间坐标  $(x, z)$  缓慢变化;  $\delta v$  为小尺度非均匀介质参数, 设:

$$\sigma(x, z) = \delta v / v_0, \quad (2)$$

假设空间随机(相对)扰动  $\sigma = \sigma(x, z)$ , 为具有零均值及一定自相关函数、方差的空间平稳随机过程. 由(1)和(2)可得:

$$v = v_0 + \delta v = v_0(1 + \sigma). \quad (3)$$

其中相对扰动  $\sigma = \sigma(x, z)$  满足:

$$\text{均值为零: } \langle \sigma(x, z) \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\text{方差为 } \epsilon^2: \langle \sigma^2(x, z) \rangle = \epsilon^2, \quad (5)$$

协方差函数为:

$$c(x, z) = \langle \sigma(x_1 + x, z_1 + z) \rangle, \quad (6)$$

从而自相关函数为:  $\varphi(x, z) = c(x, z) / \epsilon^2$ . (7)

由于假定了  $\sigma(x, z)$  是二阶平稳过程, 所以上述各式中均值  $\langle \cdot \rangle$  可以通过在随机介质中作空间平均而得到. 例如上面的二维协方差函数为:

$$c(x, z) = \langle \sigma(x_1, z_1) \cdot \sigma(x_1 + x, z_1 + z) \rangle =$$

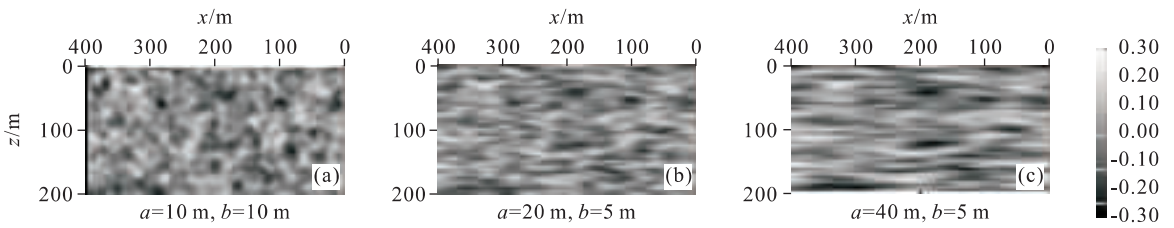


图 1 具有椭圆自相关函数的随机介质(相对扰动)模型

Fig. 1 Random medium models (relative fluctuation) with ellipsoidal autocorrelation function

$$\frac{1}{D} \iint_D \sigma(x_1, z_1) \cdot \sigma(x_1 + x, z_1 + z) dx_1 dz_1, \quad (8)$$

其中:  $D$  为随机介质所在的平面区域(或面积)。

在数学上可将随机介质看成为一个随机序列。一般的随机序列不存在理论上的傅立叶变换,但可由其自相关函数来描述。由随机过程理论,随机过程  $\sigma(x, z)$  的功率谱就是其自相关函数  $\varphi(x, z)$  的傅立叶变换  $\varphi(k_x, k_z)$ , 而要由已知的功率谱函数  $\varphi(k_x, k_z)$ , 模拟产生由它描述的随机扰动  $\sigma(x, z)$ , 这一问题在数学上就是随机过程的谱展开。应用快速傅立叶变换技术, 就可以方便地模拟产生以  $\varphi(x, z)$  作为自相关函数、具有指定均值及方差的随机介质模型。

高斯型、指数型及 Von Karman 型自相关被广泛地用于对散射现象的研究<sup>[3~9]</sup>。此外,在随机介质模型的建立中也可以使用其他函数。例如, Flatte 等<sup>[10]</sup>在分析来自 NORSAR 的 P 波时,使用了一个带限的幂律函数(类似于指数型函数)。在实际工作中可以根据实际情况选择自相关函数,并由此模拟构造相应的随机介质模型。

下面以二维情形为例,列出几类常用的二维自相关函数(一维情形、三维情形与此类似):

(1) 指数型椭圆自相关函数:

$$\varphi_E(x, z) = \exp\left[-\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}\right], \quad (9)$$

(2) 高斯型椭圆自相关函数:

$$\varphi_G(x, z) = \exp\left[-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)\right], \quad (10)$$

(3) Von Karman 型椭圆自相关函数:

$$\varphi_K(x, z) = \epsilon^2 \cdot \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}\right)^\nu \cdot$$

$$K_\nu\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}\right), 0 < \nu < 5, \quad (11)$$

其中:  $a, b$  分别是自相关函数对应的随机介质在  $x$  方向和  $z$  方向上的自相关长度,  $K_\nu$  是  $\nu$  阶的第三类贝塞尔函数。

图 1 显示了由高斯型椭圆自相关函数(10), 分别选择三组不同的自相关长度  $a, b$  (单位: m) 所产生的 3 个不同特点的随机扰动模型, 随机扰动量  $\sigma(x, z)$  已按公式(4)、(5)的要求规范化, 取  $\epsilon = 0.1$  (这时其扰动范围一般将不超过 0.3)。由于上述随机扰动模型是应用随机过程的谱展开公式, 由式(10)的椭圆自相关函数  $\varphi(x, z)$  模拟得到的, 因此由  $\sigma(x, z)$  按公式(8)计算得到的实际自相关函数应满足:  $c(x, z) \approx \varphi(x, z)$ 。从图中可以直观地看出自相关长度  $a, b$  分别描述了随机介质在水平  $x$  方向及深度  $z$  方向上非均匀异常的平均尺度。

图 1 所示的随机介质模型与地下取得的岩心图非常相似, 这说明可以用指数型椭圆自相关函数产生的随机介质模型很好地模拟地下实际介质。由图 1 所示的随机扰动  $\sigma(x, z)$ , 再根据公式(3)即可得到所要构造的以  $\varphi(x, z)$  作为自相关函数、具有指定均值及方差的随机介质模型。

由高斯型椭圆自相关函数  $\varphi(x) = \exp(-x^2/a^2)$ , 用同样方法可得到一维随机介质  $\sigma(x)$ , 将其作为层状随机介质的界面, 则可以模拟层状随机介质。图 2 为由此方法构造模拟的层状随机介质(速度)模型。其中, 第一层对应的平均速度为  $v_{01} = 3500$  m/

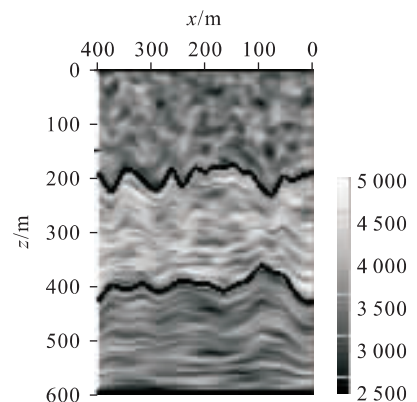


图 2 层状随机介质(速度)模型

Fig. 2 Stratified random medium (velocity) model

s, 空间随机(相对)扰动  $\sigma_1 = \sigma_1(x, z)$  如图 1a 所示; 第二层对应的平均速度为  $v_{02} = 4\ 000\ \text{m/s}$ , 空间随机(相对)扰动  $\sigma_2 = \sigma_2(x, z)$  如图 1b 所示; 第三层对应的平均速度为  $v_{03} = 3\ 500\ \text{m/s}$ , 空间随机(相对)扰动  $\sigma_3 = \sigma_3(x, z)$  如图 1c 所示. 用高斯型一维随机介质模拟 2 个界面: 第一个界面对应的平均深度为  $h_{01} = 200\ \text{m}$ , 对应的自相关长度取为  $a_1 = 20\ \text{m}$ , 标准差取为  $\epsilon_1 = 15\ \text{m}$ ; 第二个界面对应的平均深度为  $h_{02} = 400\ \text{m}$ , 对应的自相关长度取为  $a_2 = 30\ \text{m}$ , 标准差取为  $\epsilon_2 = 15\ \text{m}$ .

## 2 指数型和高斯型模型的特点

在随机介质中, 波的散射形式强烈地依赖于介质的统计特性, 如自相关函数(或功率谱密度)、方差为  $\epsilon^2$  等, 而模型构造的方法就决定了随机介质的特性. 例如: 高斯型相关函数描述单尺度平滑的非均匀介质, 而指数型和 Von Karman 型相关函数对应的随机介质具有多尺度、自相似的特性, 这似乎更便于模拟现实的多尺度介质, 它们被许多研究者所使用<sup>[1,8,11]</sup>.

为了简明起见, 下面以一维模型(相当于二维随机介质模型的一维剖面)为例, 讨论指数型和高斯型椭圆自相关函数所描述的随机介质模型的特点.

采用下面的一维指数型及高斯型椭圆自相关函数:

$$\varphi_E(x) = \exp\left[-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}}\right], \quad (12)$$

$$\varphi_G(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{a^2}\right]. \quad (13)$$

用前面提出的模拟构造随机介质模型的算法, 分别由自相关函数(12), (13)再选择自相关长度为  $a = 1$

$\text{m}, 10\ \text{m}$ , 模拟构造一维随机介质模型. 模拟得到如图 3 所示的 4 个一维随机介质(速度)模型(用同一组随机数模拟构造所得). 其中速度均值取为  $v_0 = 3\ 500\ \text{m/s}$ , 相对扰动的标准差为  $\epsilon = 0.1 = 10\%$ .

从图 3 中可以看出, 自相关长度描述了随机介质扰动的平均尺度, 高斯型相关函数描述单尺度平滑的非均匀介质, 而指数型相关函数对应的随机介质具有多尺度的特性. 图 4 中的粗线是图 3 中一维随机介质的理论自相关函数(即(12)或(13)式中的  $\varphi(x)$ ); 细线是由图 3 中各随机介质模型的相对扰动量  $\sigma(x)$ , 按如下公式计算得到的实际自相关函数:  $\varphi^*(x) = \frac{1}{\epsilon^2} \langle \sigma(x) \cdot \sigma(x_1 + x) \rangle$ .

从中可以得到下述结论: (1) 模拟随机介质模型的实际自相关函数  $\varphi^*(x)$  并不恰好等于其理论上的自相关函数  $\varphi(x)$ , 而是存在随机误差. 由于在理论上这是在连续的无限区域上推导得到随机介质的统计特征, 而实际的模拟及计算必须在有限、离散的介质模型( $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ )中实现, 从而在模拟和估计中都会发生不精确的结果. 一般来说对固定尺寸的模型, 自相关长度越大, 可能产生的误差也大. (2) 自相关函数值等于 0.5 的点的横坐标  $x_0$  可以认为正比于介质的自相关长度, 且有:

$$x_0/a \approx (\ln 2)^{k/2}, \quad (14)$$

(由  $\varphi(x_0) = e^{-(x_0/a)^{2/k}} = 0.5$  得到,  $k = 1, 2$ ). (3) 在  $a$  相等的情况下, 指数型介质比高斯型介质更为粗糙. 自相关函数在  $x_0$  点附近的斜率描述了随机介质的粗糙度, 斜率的绝对值越小(自相关曲线越平坦), 则所描述随机介质越粗糙, 且有:

$$\varphi'(x_0) = -\frac{2}{k} \cdot \frac{x_0^{\frac{2}{k}-1}}{a^{2/k}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{2/k}}{a^{2/k}}\right), k = 1, 2. \quad (15)$$

公式(14), (15)可用于根据给定的随机介质模型, 反

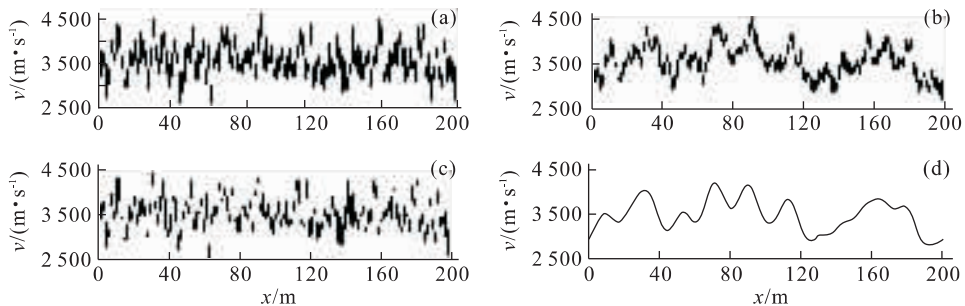


图 3 4 个一维随机介质模型

Fig. 3 Four random medium models

a.  $a = 1\ \text{m}$ (指数型); b.  $a = 10\ \text{m}$ (指数型); c.  $a = 1\ \text{m}$ (高斯型); d.  $a = 10\ \text{m}$ (高斯型)

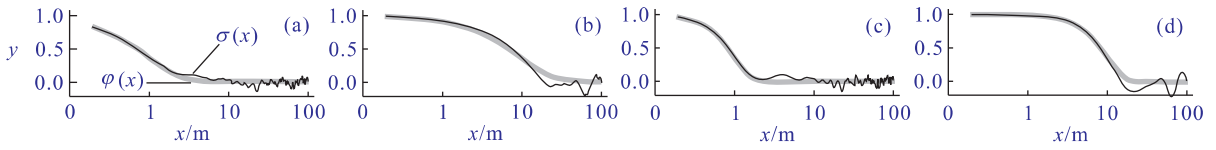


图 4 4 个一维随机介质模型的模拟误差

Fig. 4 Simulating errors of four random medium models

细线表示一维随机介质模型的自相关函数,粗线表示理论上的一维自相关函数

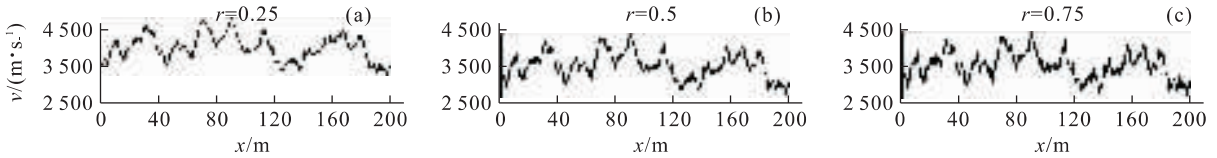


图 5 3 个混合型一维随机介质模型

Fig. 5 Three intermixed one dimensional random medium models

演该随机介质的类型(求  $k$ )和自相关长度(求  $a$ )。  
(4)指数型介质与高斯型介质在粗糙程度上的差异可以用(14),(15)式中  $k$  的描述,该参数能反映介质在微观尺度上的粗糙程度。

### 3 随机介质的粗糙度与混合型模型

从前面的讨论可以看出粗糙程度也会影响随机介质的性质,结合指数型及高斯型椭圆自相关函数的特点,笔者提出如下形式的二维混合型椭圆自相关函数:

$$\varphi(x, z) = \exp\left[-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)^{\frac{1+r}{2}}\right]. \quad (16)$$

这里  $a, b$  依然是介质在  $x$  方向和  $z$  方向上的自相关长度,  $r$  称为粗糙度因子。显然自相关函数(9),(10)相当于混合型椭圆自相关函数(16)取  $r=1, 0$  时的形式。为了简明地观察混合型椭圆自相关函数所描述的随机介质模型的特点,下面仍以一维模型为例,进行讨论。

根据混合型椭圆自相关函数(16),选择垂向自相关长度  $b=\infty$ 、横向自相关长度  $a=10\text{ m}$ ,分别取粗糙度因子为:  $r=0.25, 0.5, 0.75$ , 均值  $v_0=3500\text{ m/s}$ , 扰动标准差为  $\epsilon=0.1=10\%$ , 分别计算得到 3 个一维随机介质(速度)模型,图 5 显示了这 3 个一维随机介质模型(用同一组随机数模拟构造所得)。从中可以看出自相关长度描述了随机介质中扰动的平均尺度,而粗糙度因子  $r$  能进一步描述随机介质在微观尺度上的粗糙程度,  $r$  越大所对应的随机介质越粗糙(与图 3 b, 3d 对比)。

此外笔者在前面得到的关于指数型和高斯型随机介质模型的结论,对混合型随机介质模型也成立,只需将其中的  $k$  换成  $1+r$  即可。

### 4 结论

(1)模拟随机介质模型的实际自相关函数  $\varphi^*(x)$  并不恰好等于其理论上的自相关函数  $\varphi(x)$ , 而是存在随机误差。对固定尺寸的模型,自相关长度越大,可能产生的误差也大。(2)自相关函数值等于 0.5 的点的横坐标  $x_0$  可以认为正比于介质的自相关长度,且有:

$$x_0/a \approx (\ln 2)^{\frac{1+r}{2}}. \quad (17)$$

其中:  $r$  是粗糙度因子;  $r=1$  时成为指数型随机介质模型;  $r=0$  时成为高斯型随机介质模型。(3)自相关函数在  $x_0$  点附近的斜率描述了随机介质的粗糙度,斜率的绝对值越小(自相关曲线越平坦),则所描述随机介质越粗糙,且有:

$$\varphi'(x_0) = -\frac{2}{k} \cdot \frac{x_0^{\frac{2}{1+r}-1}}{a^{\frac{2}{1+r}}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\frac{2}{1+r}}}{a^{\frac{2}{1+r}}}\right). \quad (18)$$

公式(17),(18)可用于根据给定的混合型随机介质模型,反演该随机介质的类型(求  $r$ )和自相关长度(求  $a$ )。(4)混合型随机介质模型的粗糙度因子能更进一步定量地描述随机介质在微观尺度上的粗糙程度。通过选择在水平方向和垂直方向上的自相关长度  $a, b$  以及粗糙度因子  $r$ ,可以产生出各种不同形式的混合型随机介质模型。模拟结果显示,用笔者提出的混合型随机介质模型能灵活地描述实际介质,

具有更强的适应性,使用方便、灵活,能更为有效地模拟油气藏细节。

### 参考文献:

- [1] Ikelle L T, Yung S K, Daube F. 2-D random media with ellipsoidal autocorrelation function [J]. *Geophysics*, 1993, 58(9): 1359—1372.
- [2] Ergintav S, Canitez N. Modeling of multi-scale media in discrete form [J]. *Journal of Seismic Exploration*, 1997, 6: 77—96.
- [3] Dainty A M. High-frequency acoustic backscattering and seismic attenuation [J]. *J Geophys Res*, 1984, 89: 3172—3176.
- [4] Frankel A, Clayton R. Finite difference simulations of seismic scattering: implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity [J]. *J Geophys Res*, 1986, 91: 6465—6489.
- [5] Charratte E. Elastic wave scattering in laterally inhomogeneous media [D]. Cambridge, M A: Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [6] Jannaud L R, Adler P M, Jacqin C G. Spectral analysis and inversion of codas [J]. *J Geophys Res*, 1991, 96 (b): 18215—18231.
- [7] Kerner C. Anisotropy in sedimentary rocks modeled as random media [J]. *Geophysics*, 1992, 57: 564—576.
- [8] Korn M. Seismic wave in random media [J]. *J Applied Geophys*, 1993, 29: 247—269.
- [9] Hestholm S O, Husebye E S, Ruud B O. Seismic wave propagation in complex crust-upper mantle media using finite-difference synthetics [J]. *Geophys J Int*, 1994, 118: 643—670.
- [10] Flatté S M, Wu R S. Small-scale structure in the lithosphere and asthenosphere deduced from arrival time and amplitude fluctuations at NORSAR [J]. *J Geophys Res*, 1988, 93: 6601—6614.
- [11] Roth M, Korn M. Single-scattering theory versus numerical modeling in two-dimensional random media [J]. *Geophys J Int*, 1993, 112: 124—140.

## Simulations of Random Medium Model and Intermixed Random Medium

Xi Xian<sup>1</sup>, Yao Yao<sup>2</sup>

(1. *Department of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China*; 2. *Faculty of Earth Resources, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China*)

**Abstract:** We discussed some basic concept of random media, and discussed the characteristics of random media models with exponential and Gaussian elliptic autocorrelation functions. Meanwhile by integrating the characteristics of random media models with exponential and Gaussian elliptic autocorrelation functions, we put forward the concept of roughness factor, and hereafter the concept of intermixed random medium model, which may describe the realistic media more agilely and precisely. By selecting the autocorrelation length  $a$  of horizontal direction,  $b$  of vertical direction and  $r$  of roughness factor, we may generate diversified intermixed random media models. The results of simulations show that the intermixed random media model can describe the realistic media more agilely, with strong adaptability and convenience and agile use, and thus can simulate details of the reservoir efficiently.

**Key words:** random medium model; elliptic autocorrelation function; roughness; intermixed random medium model.