

复杂条件下 3D 电磁场有限元计算方法

黄临平,戴世坤

(石油大学资源与信息学院,北京 102249)

摘要: 从电磁场的 Maxwell 方程出发,根据电磁场的边值问题及变分公式建立了有限元方程组.采用可以模拟较为复杂的空间地质构造和地形起伏的四面体单元离散计算区域;单元中的插值函数选择了精度较高的十点双二次多项式;并采用连续的双二次多项式插值函数来模拟计算区域内单元中电导率 σ 的空间变化.推导出了地下变电导率 σ 条件下计算三维电磁场的有限元单元方程的解析表达式;采用伽辽金方法推导出了散度效正有限元方程组.根据所推导的公式,编制了三维有限元的计算程序.数值计算结果表明,上述公式推导正确,为三维电磁场的数值计算提供了一条有效的新途径.

关键词: 三维电磁场;有限元;电导率.

中图分类号: O441 文献标识码: A

文章编号: 1000-2383(2002)06-0775-05

作者简介: 黄临平(1964—),男,副教授,现在石油大学做博士后研究,主要研究方向为地球物理正、反演方法理论.

3D 电磁法的数值模拟计算方法,通过国内外不少学者多年的研究^[1~4],取得了一些有意义的成果.但由于其数值计算过于繁杂并受计算机内存、计算时间及计算量的限制,除了电导率分界面和某些简单几何形体(如球体或柱体)外,三维模型响应的计算较为困难.所以 3D 电磁场的正、反演计算在实际资料处理中的应用仍然不多见.本文从电磁场的 Maxwell 方程出发,根据电磁场的边值问题及变分公式建立有限元方程组,首次推导出了地下变电导率 σ 条件下采用四面体单元计算三维电磁场的有限元单元方程的解析表达式;并利用伽辽金方法推导出了散度效正有限元方程组.数值计算时采用可以模拟较为复杂的空间地质构造和地形起伏的四面体单元离散计算区域;采用了与常规有限元不同的向上、向下收缩网格单元的剖分技术,大大地减少剖分单元及节点数,可节省计算机内存.解方程采用了高效的、收敛速度快的复双共轭梯度法(IC-CBCG).对于大型稀疏对称矩阵,采用一维压缩内存存储方法(即仅存系数矩阵的非零元素),在微机可实现三维电磁问题的求解.数值计算结果表明,上述公式推

导正确,为三维电磁场的数值计算提供了一条有效的新途径.

1 三维介质中的电磁场与变分原理

1.1 三维介质中电磁场的边值问题

由电磁场的 Maxwell 方程,角频率为 ω (时间因子为 $e^{-i\omega t}$) 的电磁场的基本方程为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)导出导电媒质中的 3D 正演计算的 \mathbf{E} 的微分方程为:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) - i\omega(\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

式中:导磁率 μ 为常数;电导率 σ 为空间变化函数.

设初始大地电磁波是平面波场,初始电场 \mathbf{E} 的偏振方向沿 x 轴,如图 1,选取足够大的六面体区域,三维不均匀体产生的异常电磁场在区域边界 Γ 上为零,则电磁场的边界条件是:

(1)在 ABCD 面上,

$$E_x = 1, E_y = 0, E_z = 0.$$

(2)在 4 个垂直边界面上,电磁场的传播方向垂直向下与边界的法向垂直,即:

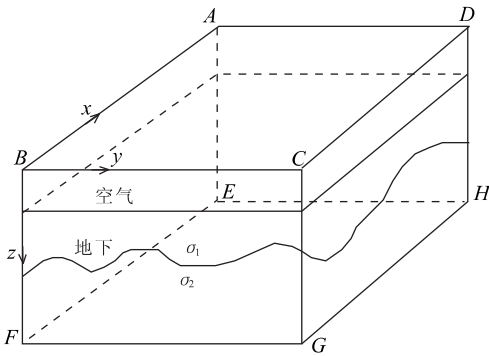


图 1 计算区域示意

Fig. 1 Sketch of calculation areas

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} \perp \Gamma.$$

(3) 在 $EFGH$ 底面上, 电磁波按指数规律向下传播,

$$E_x = ce^{-\chi z}, E_y = 0, E_z = 0. \quad (4)$$

式中: c 是常数; $\chi = \sqrt{-i\omega\mu\sigma z}$; σ 是 $EFGH$ 面以下的均质电导率.

1.2 变分公式

应用广义变分原理的定义, 对于我们研究的电磁场方程(3)及相应的边界条件的变分为:

$$F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \iiint_v \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - i\omega(\sigma - i\omega\epsilon) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dv + \iint_s [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E})] ds. \quad (5)$$

2 二次插值三维有限元分析

2.1 区域离散

有限单元的剖分是有限元中必不可少的关键性环节. 考虑到电磁场的变化规律及模拟复杂地质形体的需求, 本次研究采用的基本单元是四面体单元, 并采用了与常规有限元不同的网格剖分技术. 具体方法是场域划分成若干个曲面层, 每个曲面层再由若干个六面体单元组成, 每个六面体单元分别由 12 个四面体或 22 个四面体组成. 由于近地表剖分单元的密度要求高, 而在上部空气中和深部单元的密度可相对低, 因而在实际剖分时对于空气中和不同深度的曲面层使用不等距的网格剖分, 分别采用向上收缩网格或向下收缩网格的方法, 大大地减少了单元和节点数. 图 2a 为常规有限元划分示意图; 图 2b 为向上、向下收缩网格划分示意图; 显然, 图 2b 网格的节点数将大为减少.

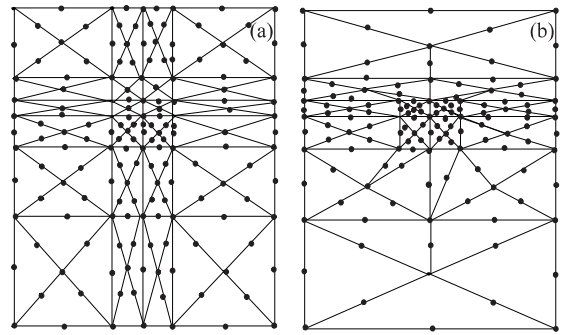


图 2 有限元剖分断面示意

Fig. 2 Sketch of cross section of finite elements

a. 常规有限元划分; b. 网格收缩划分

2.2 单元插值

三维区域单元插值采用完全双二次插值函数, 由此我们可以得到一个单元中未知解的表达式:

$$E^e = \sum_{j=1}^n N_j^e E^e = \{N^e\}^T \{E^e\} = \{E^e\}^T \{N^e\}. \quad (6)$$

式中: n 是单元的节点数; N_j^e 是单元基函数.

2.3 单元方程组的建立

由式(5)泛函(暂不考虑面积分项)可写成:

$$F(\mathbf{E}) = \sum_{e=1}^M F^e(\mathbf{E}^e). \quad (7)$$

式中: M 表示单元总数; F^e 是子泛函.

$$F^e(\mathbf{E}^e) =$$

$$\frac{1}{2} \iiint_v \left[\left(\frac{\partial E_z^e}{\partial y} - \frac{\partial E_y^e}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_x^e}{\partial z} - \frac{\partial E_z^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_y^e}{\partial x} - \frac{\partial E_x^e}{\partial y} \right)^2 \right] dv - \frac{1}{2} \iiint_v [i\omega\mu\sigma (E_x^e + E_y^e + E_z^e)^2] dv. \quad (8)$$

在 10 个节点的第 e 个四面体单元内, 将电场的 3 个分量 E_x, E_y, E_z 及电导率 σ 的插值函数代入到式(8)中, 再对 E_{xj}, E_{yj}, E_{zj} 求偏导数, 可得:

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial \mathbf{E}^e} \right\} = [\bar{K}_1^e] \{ \mathbf{E}^e \} = \begin{bmatrix} K_{xx}^e & K_{xy}^e & K_{xz}^e \\ K_{yx}^e & K_{yy}^e & K_{yz}^e \\ K_{zx}^e & K_{zy}^e & K_{zz}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^e \\ E_y^e \\ E_z^e \end{bmatrix}. \quad (9)$$

显然对于上述矩阵中的元素, 我们首次用解析的方法求出 $[K_{xx}^e], [K_{yy}^e], [K_{zz}^e], [K_{xz}^e], [K_{zy}^e]$ 和 $[K_{xy}^e]$ 的表达式. 而通常认为二次插值有限元只能用数值积分的方法求矩阵中的元素.

当有限单元的边界面落在 $EFGH$ 底面上时, 边界积分泛函为:

$$F_b^e(\mathbf{E}^e) = \iint_s \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dx dy, \quad (10)$$

$$[\bar{K}_2^e]\{E^e\} = \begin{vmatrix} K_{xx}^{1e} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^{1e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x^e \\ E_y^e \\ E_z^e \end{vmatrix}. \quad (11)$$

边界面上采用二阶三角形单元, K_{xx}^{1e}, K_{yy}^{1e} 系数矩阵可用三角形单元基函数导出解析计算表达式。

散度修正:应用上述有限元方程组公式能够求解三维电磁场矢量问题。但是研究表明,方程(3)不能唯一地确定 E , 只能获得方程的 1 个解。因此为了唯一确定 E , 必须强加规范条件, 即:

$$\nabla \cdot (\partial E) = 0. \quad (12)$$

可采用伽辽金方法推导散度修正有限元方程组为:

$$[\bar{K}_3^e]\{E^e\} = \begin{vmatrix} DK_{xx}^e & DK_{xy}^e & DK_{xz}^e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x^e \\ E_y^e \\ E_z^e \end{vmatrix}. \quad (13)$$

式中: $[DK_{xx}^e], [DK_{xy}^e]$ 和 $[DK_{xz}^e]$ 为散度修正系数矩阵。同样可求出散度修正系数矩阵的表达式。

2.4 方程组的组合

有了单元方程(9),(10)和(13)式后,我们可以将所有的 M 单元组合起来,然后再对 F 应用驻点条件,得到方程组:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial E} \right\} = \sum_{e=1}^M \left\{ \frac{\partial F^e}{\partial E^e} \right\} = \sum_{e=1}^M ([\bar{K}_1^e] + [\bar{K}_2^e] + [\bar{K}_3^e]) \{E^e\} = \{0\}. \quad (14)$$

写成紧凑形式为:

$$[K]\{E\} = \{b\}. \quad (15)$$

2.5 方程的求解

对于式(15)的有限元方程,我们分别试验了多种解方程组的方法,直接解法中有 LU 分解、LDL^T 分解方法、Gasuss 法和带状矩阵算法等方法;迭代法分别试验了共轭梯度法和复双共轭梯度法。研究发现,当线性方程组系数矩阵的条件数较差时,LU 分解方法最为稳定。如果系数矩阵中将散度修正项考虑进去,方程组的系数矩阵变为不对称,系数矩阵需要存储满阵,这样就很难满足三维电磁问题的求解。复双共轭梯度法收敛速度快,该方法适用大型稀疏对称矩阵,采用一维压缩内存存储方法,在微机上可实现三维电磁问题的求解。

3 数值计算结果与问题讨论

3.1 视电阻率的计算

解有限元方程组,求得各节点 E_x, E_y, E_z 场值

后,由二次插值基函数的公式,可以分别计算各节点上的 E_x, E_y, E_z 对 x, y 和 z 的导数,将 Maxwell 方程组在直角坐标中展开,即可计算各节点的磁场分量。

与二维模型不同,在三维模型条件下 6 个电磁场分量都耦合在一起,不能解耦成为独立的相互无关的一些波形组。但可以证明,与二维模型情况相似,电磁场分量之间仍存在复系数线性关系。因此,在三维介质情况下,与二维介质情况类似,大地电磁场水平分量之间仍存在复系数线性关系,大地电场与磁场之间与二阶张量阻抗联系起来。

$$E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y, \quad (16)$$

$$E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y. \quad (17)$$

上式中每个量都是复数。为了计算阻抗要素,需要对某一频率的电磁场做 2 次不同场源方向的独立计算,然后联合求解上式,即可求得阻抗要素。最后,由阻抗要素计算视电阻率。

3.2 数值计算结果与问题讨论

根据上述理论推导所导出的公式,笔者编制了三维有限元电磁场计算程序。下面讨论计算结果。

设计了三维不均匀模型(图 3),围岩的电阻率为 $10 \Omega \cdot m$,模型的大小与电性分布如图 3 所示。计算时单元的划分从第 1 层到第 6 层的厚度分别为: 9 500, 500, 200, 600, 1 200 和 6 000 m。

图 4 是频率分别为 100 Hz 和 1 Hz 时计算的地面的 $\rho_{xx}, \rho_{xy}, \rho_{yx}, \rho_{yy}$ 视电阻率等值图。从定性的分析计算结果来看,2 个频率的计算结果相比较,计算结果基本上反映了电磁场的传播规律,高频 100 Hz 的计算结果基本反映了地下浅层的高阻体分布,而低频 1 Hz 时的计算结果更多的是反映深部的信息,计算得到的地面的视电阻率值更接近于 $10 \Omega \cdot m$ 。

问题讨论:单元划分大小对计算精度的影响。

为了研究三维有限单元的大小对计算精度的影

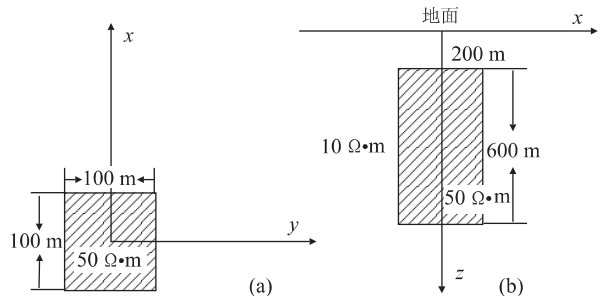


图 3 三维不均匀模型示意

Fig. 3 Sketch of 3D model

表 1 模型垂向划分厚度

Table 1 Vertical thickness of models m

	第一层	第二层	第三层	第四层	第五层	第六层
模型 1	950	50	20	40	120	500
模型 2	950	50	10	70	120	500
模型 3	950	50	200	500	1 000	5 000
模型 4	950	50	500	700	1 500	5 000

表 2 100 Hz 模型在中间一条剖面上的 ρ_{xy} Table 2 Values of ρ_{xy} at the middle profile under the frequency of 100 Hz $\Omega \cdot m$

模型 1	模型 2	模型 3	模型 4
9.881	9.895	13.818	16.701
10.159	10.150	15.549	19.387
10.110	10.160	17.380	21.880
10.154	10.183	16.080	19.938
10.092	10.037	15.477	18.593
10.247	10.249	15.838	19.208
10.300	10.320	13.730	16.250
10.220	10.237	15.898	19.874
9.318	9.346	13.781	15.905

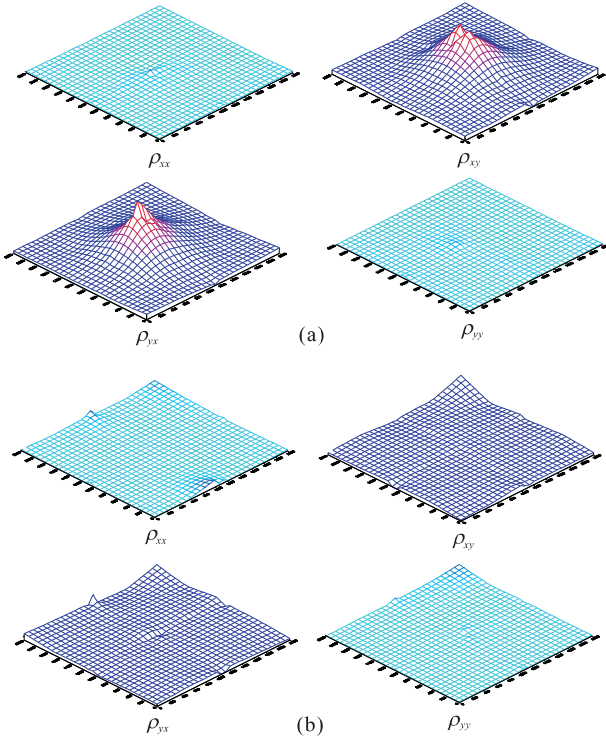


图 4 100 Hz (a), 1 Hz (b) 视电阻率分布立体图

Fig. 4 Map of resistance distribution under the frequency of 100 Hz (a), 1 Hz (b)

响,我们计算了均匀大地模型,地下电导率固定为 0.1 S/m,分别对地下单元取不同的垂向厚度,具体每层划分的厚度见表 1.对于这些模型,我们计算了当频率为 100 Hz 时地面的 $\rho_{xx}, \rho_{xy}, \rho_{yx}, \rho_{yy}$ 视电阻率值,表 2 为 4 个模型在中间一条剖面上的 ρ_{xy} 值.

当频率为 100 Hz,地下电阻率为 $10 \Omega \cdot m$ 时,电磁波的趋肤深度为 160 m 左右,从表 2 的结果可以看出,模型 1 和模型 2 计算的结果较为准确,而模型 3 和模型 4 的计算结果与理论值相差较大.这是因为模型 1 和模型 2 垂向划分单元的厚度较小,小于电磁波趋肤深度,二次插值函数满足模拟电磁场

的变化.而模型 3 和模型 4 地下第一层的垂向网格划分距离较大,模型 3 为 200 m,模型 4 为 500 m,都大于电磁波的趋肤深度,所以计算的误差较大.因此,为了保证一定的计算精度,近地表几层最好小于电磁波的趋肤深度.

数值计算结果表明,均匀大地计算的误差小于 1%.对于不均匀三维模型的计算结果,由于目前没有已知方法模型计算结果相比较,所以较难判断计算结果的精度,有待做进一步验证.上述公式推导基于地下变电导率 σ 连续变化,四面体单元可模拟复杂构造及地形,为三维电磁场的数值模拟计算提供了一条有效的新途径.

参考文献:

- [1] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998.
JIN J M. Finite element method of electromagnetic field [M]. Xi'an: Xi'an Electronic University Press, 1998.
- [2] 倪光正, 钱秀英. 电磁场数值计算[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
NI G Z, QIAN X Y. Numerical calculation of the electromagnetic field [M]. Beijing: Press of Higher Education, 1995.
- [3] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
XU S Z. Finite element method of geophysics [M]. Beijing: Science Press, 1994.
- [4] Coggon J H. Electromagnetic and electric modeling by the finite element method [J]. Geophysics, 1971, 36: 132-155.

Finite Element Calculation Method of 3D Electromagnetic Field under Complex Condition

HUANG Lin-ping, DAI Shi-kun

(Resources and Information Institute, University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: Based on the Maxwell's equations of electromagnetic field, this paper introduces equations of the finite element method for the boundary problem of the electromagnetic field and variation formula. In numerical calculation, the rectangular body elements fitted to simulate complex geology structure and topography relief were selected for discontinuity calculating areas. Ten points double secondary order interpolating functions were used in the finite element calculation and in the simulating calculation of the spatial variation of conductivity. The analytic expressions of the equations of finite elements of rectangular body elements for calculating three dimensions electromagnetic field in the spatial variation of conductivity were first deduced and the correction of the divergence equations of finite elements were deduced by the Galerkin method. The results of numerical calculation show that the deduced formulas are correct and a new way for three dimension electromagnetic field numerical calculation is proposed.

Key words: 3D electromagnetic field; finite element; conductivity.

《地球科学——中国地质大学学报》

2003 年 第 28 卷 第 1 期 要目预告

东营凹陷流体压力系统研究	刘晓峰等
四川牦牛坪稀土矿床萤石 Sr、Nd 同位素地球化学	许成等
睡莲类植物 ITS nrDNA 序列的分子系统发育分析	唐先华等
奥陶纪末期层序地层学的研究	王传尚等
陕甘川邻接区地球化学特征	胡以铿等
松辽盆地十屋断陷异常低压体系及其成因机制	解习农等
放射性元素集中于上地壳的原因及其地球动力学意义	池顺良
内蒙古多伦史前人类遗存的发现及环境意义	田明中等
大别山北部榴辉岩的大地构造属性及冷却史	刘贻灿等
焉耆盆地侏罗系油气成藏期次分析	林社卿等
西藏易贡大滑坡成因探讨	吕杰堂等