

空间模式的广义自相似性分析与矿产资源评价

成秋明^{1,2}

1. 中国地质大学岩石圈演化与矿产资源重点实验室, 湖北武汉 430074

2. York 大学地球空间科学系和地理系, 加拿大多伦多 M3J 1P3

摘要: 尺度不变性(scale invariance)包括自相似性(各向同性)、自仿射性(成层结构)、广义自相似性(各向异性标度不变性),是由各种地质过程和地质事件所产生的地质特征和模式的本质属性。尺度不变性可用分形和多重分形模型来表征。这些尺度特征的定量化可为刻画地质空间模式和模式识别提供有力的工具。例如,热液矿床的群聚现象可以用局部分形特征(局部奇异性)来刻画。通过在特征空间中(如频率空间)识别空间模式的广义自相似性,可以将空间混合模式进行分解或异常的识别。介绍了几种相关的分形模型和方法,包括度量空间模式广义尺度独立性(GSI)的线性模型;基于广义尺度独立性的异常分解 S-A 方法;度量空间模式的局部奇异性方法;以及如何利用分形特征预测未发现矿床的 2 种方法。有些方法已应用于许多矿产资源评价实例中,给出了对加拿大 Nova Scotia 省西南部湖泊沉积物样品中的 4 种元素 As、Pb、Zn 和 Cu 的地球化学数据处理分析结果,证明了局部奇异性分析和 S-A 异常分解方法对地球化学异常的增强和分离的有效性。研究表明,由 S-A 方法分解的异常往往具有多重分形的特点,而且普遍具有局部奇异性。研究区内具有明显奇异性的地区(元素含量富集区)是金矿异常区域,它们与金矿成矿作用和已知矿床的赋存密切相关。

关键词: 矿产勘查;非线性系统;多重分形;GSI;地质统计;地球化学数据。

中图分类号: P628

文章编号: 1000-2383(2004)06-0733-11

收稿日期: 2004-07-15

Quantifying the Generalized Self-Similarity of Spatial Patterns for Mineral Resource Assessment

CHENG Qiu-ming^{1,2}

1. Key Lab of Lithosphere Evolution and Mineral Resources, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China

2. Department of Earth and Space Science and Department of Geography, York University, Toronto—M3J 1P3 Canada

Abstract: Scale invariance, including self-similarity (isotropic), self-affinity (stratification), and generalized self-similarity (anisotropy), is a common property of spatial patterns generated from various geological processes and events. Scale invariance can be described by means of fractal and multifractal models. Quantifying the scale invariance properties of spatial patterns may provide a powerful tool for characterizing geological processes and events. For example, the clustering distribution of hydrothermal mineral deposits can be characterized by means of local singularity analysis. The identification of distinct generalized self-similarity in the Fourier domain can be used to decompose spatial patterns into separate components such as anomalies from background patterns. The current paper introduces a number of relevant multifractal models and methods, including a linear model for generalized scale invariance (GSI); a spectrum-area method (S-A) for anomaly separation; a local singularity analysis method; and methods for predicting undiscovered mineral deposits on the basis of fractal and multifractal properties. Some of these methods have been applied in various case studies. The case study introduced in the current paper demonstrates the application of S-A anomaly separation and local anomaly enhancement in analyzing lake sediment geochemical data (As, Pb, Zn and Cu) for gold mineral resource prediction. It has been shown that the areas delineated by a

基金项目: 国家科技司“863”项目(2002AA135090)“非线性空间信息获取”;安大略矿产勘查计划(OMET);自然科学基金会(NSERC)项目。

作者简介: 成秋明(1960—),男,教授,1994年毕业于加拿大渥太华大学,获博士学位,主要从事矿产与勘探、数学地质、地理信息系统、矿产资源与环境评价的教学和研究。E-mail: qiuming@yorku.ca

strong singularity in As, Pb, Zn and Cu are spatially associated with the location of known gold mineral deposits.

Key words: mineral exploration; non-linear system; multifractal; generalized scale invariance (GSI); geostatistics; geochemical data.

热液成矿是一种在特殊的地壳地质环境中发生的水岩反应的自然地质过程. 热液矿床的成因通常与携矿流体的形成、运移和进入围岩沉积等几个过程相关. 在每个过程中, 热液组分和浓度随区域和局部构造性质、围岩等地质环境的不同而发生变化. 从原理上来说, 这些过程遵循热动力学定律. 然而研究已经表明, 成矿过程往往由多个复杂系统组成 (Turcotte, 2002; 於崇文, 2002; Cheng, 2003a). 成矿过程中成矿物质的沉淀和富集通常会造造成矿母岩中成矿元素浓度的奇异分布 (成秋明, 2003b). 而奇异性程度往往与成矿系数等因素有关.

矿产勘查的重要任务之一就是识别复杂成矿系统的影响和圈定成矿异常的空间范围. 最有效的途径是进行综合地学调查 (地质、地球化学、地球物理和遥感调查). 矿体周围的地球化学晕 (成矿对围岩的三维影响区域) 常常具有与围岩不同的特征. 这些地球化学晕提供了特殊的地球化学找矿信号. 这些信号可用地球物理和地球化学方法在地表介质中进行检测和识别, 如土壤、冰积物、腐殖质、水和岩石样品等. 这样测量的地球物理和地球化学信号的振幅和频谱性质很大程度上取决于矿化的强度、矿体产出的地质环境以及矿体的埋深等因素. 因此, 对隐伏矿体和与之相伴的地球化学晕所引起的模式识别通常需要综合考虑多种指标, 例如: 矿物 (元素) 共生关系、元素浓集强度、元素含量分布的空间模式等. 在一些情况下, 如果多种地质过程所引起的地球化学信号相互重叠, 加之地表风化作用对地球化学元素分布的再次影响, 矿化异常组分是不容易被识别的. 比如岩石中元素含量值由背景和异常组成, 前者是区域地质作用的结果, 而后者是成矿作用的产物. 如果异常比较微弱并且处于变化较大的背景场之中, 那么对这种异常的识别是相对困难的.

对微弱和难识别异常的识别需要发展先进和有效的技术方法, 包括数据处理方法和技术. Harris *et al.* (1999) 综述了目前常用的区分地球化学异常和背景的数据处理方法. 一些方法是定性的, 还有一些则更注重量化. 应用地理信息系统、统计和空间统计方法进行数据处理在异常提取中扮演着重要的角色. 统计分析方法已成为地球化学背景和异常识别

的常规方法. 这些方法在一些问题中也许比较有效, 但如果背景和异常的叠加较复杂或弱异常处于变化强烈的背景场中, 一般的统计方法就受到限制. 基于地球化学元素含量值高低的空间统计方法对埋藏很深的矿体或弱矿化作用造成的异常的识别是非常困难的. 然而, 矿化作用过程引起的异常模式在空间性质和频率性质方面通常是不同的. 正确地定量刻画空间性质和频率性质对于弱异常和复杂异常的识别来说显得非常必要. 本文介绍了用于异常识别的一些分形/多重分形的方法, 由 York 大学 Geomatics Research Lab 与加拿大地调局、美国地调局联合开发的 GeoDAS (GeoData Analysis System) GSI 系统中已经采用了这些方法 (Cheng, 2000b). 对加拿大 Nova Scotia 省西南地区以及安大略省北部 Abitibi 地区的地球化学异常分析研究中分别验证了这些方法的应用效果. 目前, GeoDAS 技术已被许多国家地调局和矿业公司采用.

1 复杂成矿异常的分形分析

有许多方式来定义和解释分形和多重分形的概念. 比如说, 可以从纯数学的角度以数学公式来定义, 也可以从物理学的角度着眼于物理过程的结果来定义. 从地质应用角度来看, 分形和多重分形可认为是广义自相似地质过程最终产生的某种模式 (特征). 这些模式如果随着观察尺度的变化而显现自相似性, 则称它们具有标度独立性质. 对于具有分形和多重分形的各种地质模式, 其局部模式与整体模式会具有一定的相似性. 例如, 在不同区域范围内观察同种类型的矿床的空间分布通常显示出某种自相似模式. 不同类型的矿床的空间分布可能呈现极大的差异. 例如, 层控矿床常常沿一定的地层层位或地层界线分布, 而岩浆热液矿床的分布也许与岩浆岩分布更加相似. 另一种理解自相似的途径是对一个初始模式以某种相似的变形进行改造, 最终产物将显示出与度量尺度无关的自相似性. 例如, 矿物的蚀变过程以及岩石的变质变形所产生的模式往往具有自相似性. 在显微镜下观察岩石薄片时, 沿石榴子石断口的不同强度的蚀变模式往往具有自相似性. 再比

如,在野外岩石露头和手标本上观察到的不同大小的变质岩变形结构—构造也往往具有一定相似性。岩石的变质过程可能涉及到不同的拉伸—压缩或旋转变形,也可能涉及到岩石有用元素含量的富集和亏损。由于成矿作用往往会受到诸如岩浆作用、火山作用、沉积成岩作用、构造作用等作用影响,因此所产生的矿床的空间分布往往具有一定的规律性和相似性。比如带状、环状、串株状排列是岩浆热液矿床的常见分布规律。描述矿床和矿体的空间分布以及分带分布规律是矿床学和矿产勘查学中常见的工作。这种空间分布以及分带规律往往反映了成矿系统参数如化学成分、温度和压力等动力学条件的渐进变化。

如果一个模式具有多重分形特征,那么在该模式上定义的某种量值 $C(r)$ 与其度量的空间范围大小(度量尺度)会遵循如下的幂律关系:

$$C(r) \propto r^{\alpha-2}. \quad (1)$$

这里 $C(r)$ 是基于尺度 r 的邻域内(特殊的邻域,如圆)密度含量的平均值, α 是幂律关系的指数值。如果指数 α 在整个研究区是常数,那么这种空间模式是一种单重分形或非分形分布;否则,如果 α 具有多值,则这种空间模式具有多重分形分布。模型(1)确定的幂律关系在一定的范围内是成立的。在实际应用中,模型(1)可有多种形式,比如, $C(r)$ 可以表示 r 邻域内的矿床分布密度(矿床数量与 r 邻域面积的比值), $C(r)$ 还可以表示 r 邻域内的地球化学元素的平均含量(密度)等。

在多重分形中, α 被称为奇异性指数,它表征了模式密度分布随度量尺度的变化性。在不同的位置上幂律关系可以具有不同的幂指数值 α 。奇异性指数 α 的取值有 3 种不同的情况:如果在某些位置上 $\alpha=2$,那么 $C(r)$ 将与尺度 r 独立,或者说 $C(r)$ 保持常数;而在其他位置上如果 $\alpha \neq 2$,那么 $C(r)$ 的变化就与度量尺度 r 的大小有关。我们称前一种情况下,模式在该位置上是非奇异的(线性的);后一种情况下模式是奇异的。在奇异位置上,如果 r 非常小, $C(r)$ 要么趋向于零($\alpha > 2$),要么趋向于无穷大($\alpha < 2$)。我们称 $\alpha < 2$ 正奇异或 $\alpha > 2$ 负奇异。正奇异点处计算所得的平均值 $C(r)$ 随着窗口大小 r 的减小而增大;负奇异点处的 $C(r)$ 随着窗口大小 r 的减小而减小。由不同的 r 计算得到 $C(r)$,作出它们的双对数图,通过最小二乘直线拟合可以估计出奇异性指数 α 。奇异性指数 α 具有如下的性质(Cheng,

1999a):

$\alpha=2$: 当且仅当 $C(r)=\text{常数}$,与 r 无关;

$\alpha < 2$: 当且仅当 $C(r)$ 是关于 r 的递减函数,在给定位置 $C(r)$ 具有凸性;

$\alpha > 2$: 当且仅当 $C(r)$ 是关于 r 的递增函数,在给定位置 $C(r)$ 具有凹性。

1.1 矿床分布的多重分形特征和预测

群聚分布(cluster distribution)是地质上常见的分形特征。例如,矿床常常成群出现,大矿床周围分布有众多较小的矿床(Cheng, 2003a)。群聚现象的空间点过程可以用幂律函数 $C(r) \propto r^{\alpha-2}$ 来描述。矿床点密度 $C(r) = \text{矿床个数} / \pi r^2$,即半径为 r (可变)的窗口中矿床点的累计个数。对于完全随机的或规则分布的空间点过程, $\alpha=2$;而对于群聚分布, $\alpha \neq 2$ (Agterberg *et al.*, 1993)。类似地,矿床的金属量体密度: $\rho(r) = \text{窗格内矿床金属总量} / \pi r^2$,也可以用如下的幂律关系来表示: $\rho(r) \propto r^{\alpha-2}$ 。奇异性指数 α 度量了矿床分布的群聚性质。在密度公式中,它度量了矿床分布的群聚程度。 $\alpha < 2$ 表明该处矿床的群聚程度比规则或随机分布更加强烈; $\alpha > 2$ 则表明群聚程度较规则或随机分布更加微弱。在非奇异点附近(即 $\alpha \approx 2$),如果矿床呈均匀或随机分布,那么矿床密度就等于常数,如果某处 $\alpha < 2$ 表明大型超大型矿床周围有中型或小型矿床产出(Cheng, 2003a)。

奇异性指数($\alpha \neq 2$)度量了群聚的程度。应用分形模型或者多重分形度量点过程的群聚性质已被广泛接受(Agterberg *et al.*, 1993)。不过已出版的文献中很少涉及应用分形性质对未知矿床进行空间位置的预测。因为现今的矿产潜力评价中还尚未考虑这些分形性质。在一般的数据综合处理中,给定各种证据(如 A 和 B)矿床出现(D)的后验条件概率($P[D|AB]$)能用许多方法来估计,包括证据权法、逻辑回归等等。这些方法的预测结果仅仅是表明该地区找到未知矿床的概率的高低,而对于预测的位置是处在该矿群的中心还是在矿群的边缘则无法告知。在 2001 年澳大利亚 Adelaide 市召开的“工业数学研讨会”上,成秋明首次提出了结合多重分形进行矿产资源潜力评价的建议(Broadgate *et al.*, 2001)。进而给出矿产资源潜力预测模型(Cheng, 2004a)。该模型将奇异性引入了预测模型。这里简要介绍这几种方法:第一种是将矿床分成 2 组,识别出 $\alpha < 2$ 的一组,并使用该组作为训练样本点来计算后验概率。这个模型中的后验概率不仅可以说明发现未知

矿床的概率,而且还可根据强烈的群聚特征指示未知矿床的可能空间位置;第二种方法是直接估计群聚指数 α 或它的范围的统计分布,这可以使用回归方法($\alpha = F[A, B, \dots]$)或指示克里金($P[\alpha > \alpha_i | A, B]$),从多种与群聚指数有关的证据中估计 α 值的分布,结合后验概率可以对未知区未发现矿床进行综合预测和评价。

1.2 奇异性分析和异常增强

如前所述,多重分形模型中的奇异性(α)可以认为是表征地球化学模式局部结构性质的指标,如元素浓度的富集和亏损特征。实际上,作者最近的研究发现,奇异性指数(α)与热液成矿的成矿系数是有联系的。由于奇异性指数具有这样的特性,分析奇异性指数对于矿化异常的增强和识别是至关重要的。

以地球化学模式来说明奇异性的概念,具有正奇异性($\alpha < 2$)的地段通常与矿化富集相关,这些地段的成矿元素的密度往往是显示升高,而负奇异性($\alpha > 2$)表明元素密度的亏损。因此,从地球化学图中对奇异性的估计能够用来表征成矿元素密度的奇异性分布模式,从而为与矿化作用或局部地质构造相关的地质异常解释提供有用信息。从应用的观点来看,下述 2 种方法可以用来估计奇异性。

1.2.1 窗口方法 为了从地球化学图中估计局部奇异性,基于窗口的方法步骤如下:

第一步:对于图上任意给定位置,定义一系列滑动窗口(方形的、圆形的、矩形的),窗口大小依次递增, $r_{\min} = r_1 < r_2 < \dots < r_n = r_{\max}$;

第二步:对每个窗口中的含量计算平均值 $C(r_i)$;

第三步:在双对数纸上,以 $\log r$ 为横轴,以 $\log C(r)$ 为纵轴,对 $(r_i, C(r_i)) (i = 1, \dots, n)$ 投点绘图, $\log C(r)$ 随 $\log r$ 呈线性趋势,线性关系的斜率可以认为是 $(\alpha - 2)$ 的估计;

第四步:在地球化学图上对所有位置的滑动窗口按照类似的处理方法,就可以得到奇异性分布图。

以上对奇异性指数估计所带有的不确定性和误差也可以结合计算进行估计。解释奇异性的分布时要考虑计算的不确定性。只有具有较小的不确定性的奇异性数值才有进一步应用的意义。尺度范围 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 可以通过观察幂律函数的存在性或者考虑感兴趣的局部结构的尺度来确定。数据的分辨率通常限制了幂律关系成立的下限值 r_{\min} 。有时不同的尺度范围 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 会对应不同的幂律函数关

系。使用不同的区间范围 $[r_{\min}, r_{\max}]$ 来计算奇异性指数可以获得不同的奇异性。例如,小尺度的奇异性可能反映了与矿化作用相关的局部异常,而大尺度的奇异性可能反映与区域成矿作用相关的大尺度异常等。在解释奇异性与成矿的关系时了解这一点很重要。

1.2.2 等值线方法 从前面介绍的奇异性估计过程中,窗口方法采用了不同大小的规则窗口。固定形状窗口有时并不适合处理地质异常的不均一性。既然具有较强的奇异性的区域往往是矿产勘查的兴趣所在,那么作为一种替代方法,基于 C-A 原理(Cheng *et al.*, 1994)的等值线方法能在选定的那些具有较强的正奇异性($\alpha < 2$)或负奇异性($\alpha > 2$)的位置来估计奇异性。等值线方法可用以下步骤来实现:

第一步:确定一系列封闭的相继的等值线,计算每条等值线内元素密度含量的平均值 $C(r)$;

第二步:计算等值线所围的面积(A),等值线的线度(r)可以被面积的平方根所取代。 $C(r)$ 与 r 之间的幂律关系可以修改为 $C(r) \propto A^{\alpha/2-1}$ (C-A 模型)。

第三步:在双对数纸上,以 $\log A$ 为横轴,以 $\log C(r)$ 为纵轴,用最小二乘法对 $\log A \sim \log C(r)$ 关系拟合即可得到奇异性指数的估计值。用这种方法得到的奇异点在图上没有确切的位置,而是与那些用来进行计算的等值线的内部范围有关。等值线方法仅适用于可以圈出具有形状相似的等值线的地段,这样的一组等值线可用 C-A 分形模型来描述。在一些情况下,取值小的等值线包含有若干取值较大的封闭的等值线,这些封闭的等值线值(C)与面积(A)可能具有不同的幂律关系,从中可以估计出不同的奇异性。此外,采用不同大小的等值线组合可以估计不同尺度的奇异性指数,大尺度和小尺度奇异性指数可以为异常评价提供多尺度结构信息。

1.3 奇异性指数的分布

奇异性指数的数值通常是在附近变化的有限值。对于具有守恒的多重分形模式,没有奇异性的区域($\alpha = 2$)所构成的子集合的分形维数接近于格子维数(box accounting dimension),这样没有奇异性的区域反映了背景区域,其分布占全图的绝大部分。而奇异性区域(异常区域, $\alpha \neq 2$)的维数可以由分形谱函数 $f(\alpha) < 2$ 给出(Cheng, 1999b)。这表明奇异性(异常)区域比非奇异(背景值)区域分布范围相对较小。从空间统计观点来看,在地球化学样品的大多数数据($\alpha \approx 2$)符合正态分布或对数正态分布,而小部

分数据($\alpha \neq 2$, 两端截尾极高值和极低值)可能符合分形分布(Agterberg, 1995; Cheng, 1994). 区分正态和对数正态分布与极值分布(分形分布)对于地质异常的识别至关重要. 大多数的传统参数统计方法要求数据符合正态分布, 这就是传统的统计方法不能有效处理和分析异常的原因之一. 而多重分形能将这几种分布形式有效的结合, 因此, 应用多重分形模型来研究异常具有很好的前提.

勘查地球科学研究中经常会遇到极值问题. “异常”与“背景”是一对相对的概念. 在勘查地球物理中, 异常是一个与预定的参考值或背景值相对的量术语. 例如, 布格重力异常指的是与选定参考值的相对变化值, 有正负异常的区分. 在勘查地球化学中, 狭义的异常定义为: 以区域背景含量的上下限值作为阈值, 异常通常是指高于和低于阈值的地球化学含量. “地质异常”是更广义的地质学概念, 它是指和周围地质体有显著差异的地段. 这些差异可以是岩矿组分、结构、构造或地质成因多方面的(赵鹏大, 1998). 从勘查数据中识别异常是勘查地球物理和地球化学的核心任务. 如前所述, 异常的特征受很多因素制约, 包括矿体的埋藏深度. 因此, 仅仅依赖场的高低(含量值)来识别地球化学异常不是总能奏效的. 对地球化学异常的分析 and 识别应该把注意力投向那些与周围地区具有显著差异的地球化学模式的区分. 这些差异可以用含量值、元素组合以及空间组合或尺度独立性等特性来反映. 例如异常含量值的频率分布可能和背景值的频率分布有很大不同, 它所反映的空间模式可能与背景值所反映的空间模式显著不同. 这种类型异常的发现要依据它们的空间模式而不是含量. 从地质异常的观点来看, 地球化学异常和地球物理异常所反映的是地质异常的某些方面(Zhao and Chen, 2001). 因此, 异常识别方法应该是综合性的. 采用不同的异常属性识别异常是必要的. 奇异性指数不仅可以用来刻画具有连续性的空间模式如地球化学异常和地球物理异常等, 也可以表征不连续的空间特征分布如断层、岩性和矿床分布等.

1.4 奇异数据插值和异常增强

以上讨论表明, 奇异性是勘查地球科学数据和模式中常见的结构信息. 识别和定量地刻画这种内在的空间属性无疑是重要的. 然而, 如何利用这种属性来提高我们对空间信息的处理和分析能力和应用水平是值得进一步研究的内容. Cheng(1999a) 发展

了一种多重分形插值方法. 这种方法不仅考虑了通常克里金(Kriging)方法所基于的空间相关性, 而且引入了局部奇异性指数. 该方法使得空间数据的网格化过程能最大程度的保留空间模式的局部变化信息. 与传统插值方法如滑动平均、反距离加权(IDW)、克里金方法等相比, 多重分形插值方法有 2 个显著的优点: (1) 可以提高插值结果的精确性; (2) 可以保留插值表面的局部结构. 后者在地球化学和地球物理数据处理和模式识别中非常重要(Cheng, 1999a, 2000a, 2001a). 从公式(1)可推导出处理二维模式的多重分形方法的通用公式:

$$C(r_1) = (r_1/r)^{\alpha(x)-2} C(r). \quad (2)$$

这里 r_1 和 r 是邻域的 2 个任意尺度. 公式(2)表明从 2 个不同的邻域计算得到的平均值 $C(r)$ 和 $C(r_1)$ 与尺度比有幂律关系. 如令 r_1 为单位或像元尺度, r 为用像元个数表示的半径值, $C(r)$ 用它的加权滑动平均值来替代, 我们可以得到以下的关系式:

$$C_x = r^{\alpha(x)-2} \sum_{x+h \in \Omega(x,r)} w(\|h\|) C_{x+h}. \quad (3)$$

这里, C_x 是位于 x 处的密度平均值, $\Omega(x, r)$ 是中心位于 x 处半径为 r 的邻域, C_{x+h} 是位于 $\Omega(x, r)$ 中 $x+h$ 处的密度值($x+h \in \Omega(x, r)$), $w(\|h\|)$ 是原点在 x , 距离向量为 h 的位置上 C_{x+h} 值所占的加权权重. 权重 $w(\|h\|)$ 可以用不同的方法进行估计, 例如克里金和反距离加权等. 如前面 2.2 节所提到的, $\alpha(x)$ 是位于 x 处的奇异性指数, 它可以通过对不同的 r 与 $C(r)$ 的数值进行回归而得到. 显而易见, 当像元 x 处于非奇异的位置, 即 $\alpha=2$, 采用公式(3)所估计的 C_x 和普通方法(如克里金或反距离加权)得到的结果是一致的. 但是当 $\alpha < 2$ 或 $\alpha > 2$, 用公式(3)估计的 C_x 值就与修正因子 $r^{\alpha(x)-2}$ 有关. 因为 $\alpha < 2$ 或 $\alpha > 2$ 分别对应 x 处 $C(r)$ 表面的凸和凹性, 所以这种增加($\alpha < 2$)和减少($\alpha > 2$)的修正是合理的. 公式(3)不仅考虑了空间相关性而且结合了奇异性, 前者由权重 w 来体现, 后者由奇异性指数来表征. 显然, 克里金或反距离加权是多重分形方法的特例. 相反多重分形方法可视为传统滑动平均方法(包括克里金或反距离加权方法等)对处理具有奇异性数据的推广. 因而, 采用这种方法不仅可以进行插值和估计, 而且能进行局部异常增强和异常分析. 这对勘探数据处理和异常识别是非常适用的和有意义的.

1.5 自相似、自仿射和广义尺度独立性

前面对多重分形和奇异性分析的讨论主要是基

于各向同性的情形的,即尺度变化仅涉及一个变化率 r . 然而实际情形可能更加复杂,需要更多的标度参数来描述尺度独立性或幂律模型. 例如,经过不同的地质作用的叠加过程如多次热液成矿作用和构造作用而导致的矿床赋存或分布模式往往会具有各向异性. 这些过程具有不均一性,例如方向性压缩和拉伸作用,最终产生的分布模式也许会显示自仿射性. 这样的模式所具有的尺度独立性可以采用以下的模型来度量:

$$M(T_\lambda) = M(\lambda^{-G}) = \lambda^D. \quad (4)$$

这里, M 是某种测度, $T_\lambda = \lambda^{-G}$ 是异向性变换, G 是 2×2 矩阵, λ 是尺度比(图幅范围/度量单位,其中图幅为常数,而度量单位为 r). 公式(4)可以看作在各向异性变换下的尺度独立性. 要注意的是,虽然公式(4)与公式(1)中都只有一个幂律指数(α 或 D),但公式(4)中在各个方向上尺度的变化率是不同的. 如果各个方向上的变化率是一样的,那么 G 就是单位矩阵,模型(4)将变为模型(1). 形成复杂的各向异性的模式(4)会涉及到方向性压缩和拉伸作用以及旋转作用,这样的模式所具有的尺度不变性被称之为广义尺度不变性(generalized scaling invariance, 简称 GSI)(Schertzer and Lovejoy, 1991). 即使 2 个模式具有类似的幂律指数(α 或 D),由于各向异性的差异,这些模式可能反映不同的形成过程,所以识别不同的标度模式有助于鉴别模式的形成过程. 因而,对异向性尺度独立性的研究较通常的尺度独立性的研究更具应用前景.

Lovejoy and Schertzer (1985)提出了一般的线性 GSI 模型,其表达式为:

$$G = dL + kJ + eI. \quad (5)$$

这里 L, K, J 和 I 形成了二维矩阵基地

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

变换 T_λ 的显函数形式为

$$T_\lambda = \lambda^{-G} = \lambda^d \left(I \cosh(au) - \frac{(G - dI)}{a} \sinh(au) \right). \quad (7)$$

这里 $u = \log \lambda$, $\alpha^2 = c^2 + f^2 - e^2$. 如果 $\alpha^2 < 0$, 那么,以上公式中可用 $|\alpha|$ 取代 α . 在尺度变换公式(7)中, d 所反映的是总体的收缩程度, c 度量的是纵向和横向尺度相对比例, f 表达的是沿对角线的对称反射,

e 是旋转的程度. 可以看出,要想完全刻画各向异性的尺度独立性,除了总体的幂指数 D (与 α 类似) 以外,还应该计算异向性参数 c, f, e . 这些参数能进一步说明空间模式的异向性特点. 这些特点在空间模式的应用和处理中是非常有用的. 业已证明,线性广义标度不变性变换(7)能够产生多重分形空间模式(场),当这样的模式被转换到傅立叶空间中(傅立叶域内)后,其能谱密度和频率(波数)分布的“面积”之间具有分形(幂律)关系(Cheng, 2001b, 2004b),能够用如下的幂律关系建立模型:

$$A(\geq S) \propto S^{-2/\beta}. \quad (8)$$

这里, S 代表能谱密度, A 代表能谱密度大于阈值 S 的波数集合的面积(单位为波数平方). 这种关系与地球物理数据处理中的常见函数 $S(\omega) \propto \omega^{-\beta}$ 是不同的,它表示了能谱密度在半径上的平均数值和波数(频率)之间的关系. 这样的函数反映的能谱密度分布是各向同性的. 根据公式(8), Cheng *et al.* (1999)提出了基于标度独立性的空间模式分解(识别) $S-A$ 方法. 这种方法已被广泛地应用于地球化学和地球物理异常的分解和识别中. 以下将简要介绍该方法的基本原理.

1.5.1 分形滤波技术($S-A$ 方法) 由以上讨论可以看出,模型(8)度量了空间模式在频率域中的广义自相似性. 这种广义自相似性的特点是,空间模式在表面上或形式上具多样性或变化性,而内在具相似性. 如果我们将频率作为一种“基因”序列,那么空间模式就完全由它的“基因”序列所决定. 比如,由频率和相位信息即可完全恢复空间模式. 模型(8)表明,具有广义自相似的空间模式在频率域中同样具有自相似性. 这就提示了我们,如果由于地质作用的差异而造成叠加的空间模式具有不同的广义自相似性,那么这些叠加的空间模式在频率域中会具有不同的广义自相似性. 如果我们能够在频率域中将这些不同的广义自相似性进行识别,进而采用滤波(基因改造)的方法选取部分频率信息重新恢复空间模式. 这样恢复或重建的空间模式在空间域中往往反映特定的空间模式组分,如异常组分或背景组分等. 因而,这样的空间模式的分解过程就能达到对异常和背景的分离目的. $S-A$ 方法的具体计算过程可由以下的步骤来实现:

幂律关系(8)可以被用来在频率域中拟合能谱密度与分布“面积”的关系. 在不同的能谱密度范围内这种幂律关系会对应不同的幂指数. 如果将 $S -$

A 的数值绘制到双对数坐标图上,不同的幂律关系会表现为具有不同斜率的直线关系。因此,可以通过不同线段的拟合来确定具有不同 $S-A$ 关系的能谱密度范围。在不同的范围内能谱密度具有不同的广义自相似性。这样的能谱范围将被定义为不同的滤波器。这样的滤波器往往是不规则甚至是分形集合的。例如,两条直线段拟合 $S-A$ 的关系,这两条直线的相交点就可以给出阈值 S_0 。使用 S_0 可将能谱密度的分布范围分为两个区域,即两个滤波器:第一个滤波器: $G_B(\omega) = 1$, 当 $S(\omega) > S_0$; $G_B(\omega) = 0$, 当 $S(\omega) \leq S_0$ 。第二个滤波器: $G_A(\omega) = 1$, 当 $S(\omega) \leq S_0$; $G_B(\omega) = 0$, 当 $S(\omega) > S_0$ 。从 $G_A(\omega)$ 和 $G_B(\omega)$ 的定义可以看出,滤波器的形状可以是不规则的,它取决于能谱密度分布的复杂性。然而,总体来说,滤波器 G_A 中的波数 ω 会普遍大于滤波器 G_B 中的波数,这表明 G_A 的频率大于 G_B 的频率。从这种意义上说, $G_A(\omega)$ 对应了相对较高的频率成分, $G_B(\omega)$ 对应了相对较低的频率成分。然而,值得注意的是,这两个滤波器并非是按频率或波数边界截然分开的。两个滤波器的能谱密度分布满足不同的幂律关系或具有不同的异向性尺度独立性。在特殊的情形下,这样的滤波器才会呈现圆形(各向同性或自相似)或椭圆型(成层结构或自仿射)。经过这两个滤波器滤波后应用傅立叶逆变换就可以得到空间域中的分解成分:

$$M_B = F^{-1}[F(M)G_B], M_A = F^{-1}[F(M)G_A]. \quad (9)$$

这里, F 和 F^{-1} 分别代表作用于空间模式 M 上的傅立叶变换和傅立叶逆变换。因此,这两种被分解的成分 M_B 和 M_A ($M = M_A + M_B$) 具有不同的性质。 M_B 和 M_A 仍然分别为连续变化的空间模式。这两种空间模式之所以被区分开来并不是它们所反映的信息频率完全不同,而是它们的频率组合在频率域中呈不同的自相似性。例举地球化学背景和异常来说明 M_A 和 M_B 的关系。背景并不一定是常数。由于各种原因均会导致背景的变化性,比如不同的岩石类型会造成背景的区域性变化。而异常也并非总是呈高频信息。异常的幅度与空间频率是变化的,这取决于许多因素。然而,无论异常的大小和幅度怎么变化,由于造成异常的地质原因是类似的,因此它们在一定的特征(基因)空间内(如傅立叶空间、特征向量空间等)往往具有自相似性(Cheng, 2003a, 2004b)。可见,在特征(基因)空间内寻找空间模式的广义自相似性,进而识别和分解空间模式是有意义的。

2 金矿床地球化学异常识别的分形分析

本文采用多重分形(奇异性分析和 $S-A$ 异常分解方法)重新研究了加拿大 Nova Scotia 省西南部与金矿分布有关的湖泊沉积物地球化学数据。该数据曾经被应用于奇异性分析(成秋明, 2001a)。当时采用了克里金方法和多重分形方法进行了对比。本文将进一步研究奇异性与异常的关系,特别是通过 $S-A$ 分解异常与奇异性地段的关系。将多重分形谱函数、奇异指数以及 $S-A$ 分解的异常相结合,说明这些方法之间的内在联系。

该研究区位于加拿大北部 Nova Scotia 省西南部地区。面积大约 4 000 km²。区内出露的主要地质现象包括古生代浅变质碎屑沉积岩和晚期花岗质杂岩(图 1)(Chatterjee, 1983)。图 1 中标示的“南山岩基”(SMB)由多相花岗杂岩组成,几乎占整个研究区面积的 1/3。古生代浅变质沉积地层遭受了强裂的北东向褶皱作用,形成了一系列走向北东展布的平行褶皱构造。北西向构造以断裂为主。区内已经发现多处热液型金矿床和钨—锡—铀矿床。金矿床和矿点主要分布在花岗杂岩体外一定范围,而钨—锡—铀矿化主要发生在花岗杂岩体内部。这些矿床的分布

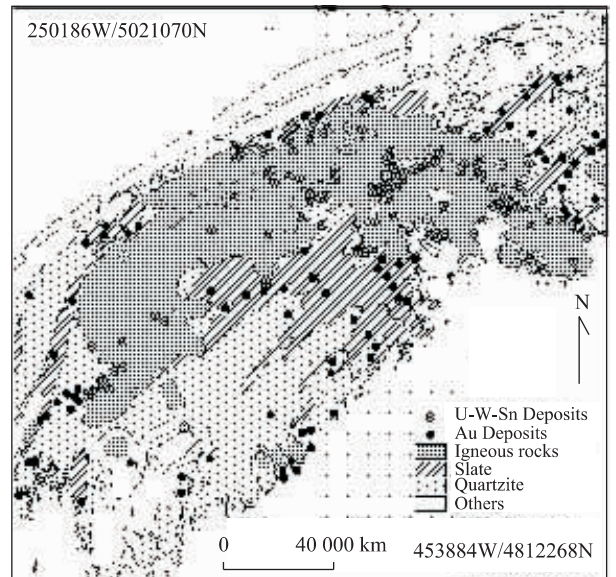


图1 加拿大 Nova Scotia 省西南部地区地质简图和已知矿床分布(Chatterjee, 1983)

Fig. 1 Simplified geology and distribution of known mineral deposits in southwestern Nova Scotia, Canada

均受褶皱或断裂构造的明显控制。除此之外,金矿化和钨—锡—铀矿化有关蚀变还分别受沉积岩岩相变化和花岗杂岩体内部岩相变化的影响。这些局部的控矿条件往往会造成矿化有关元素在岩石以及地表介质中呈奇异性分布。

2.1 地球化学数据的奇异性分析和应用

本文采用多重分形方法对 1 948 个湖泊沉积物样品(图 2)(Rogers *et al.*, 1987)中的 As、Cu、Pb 和 Zn 含量值进行了数据插值和绘图(Cheng, 1999a, 2000a, 2001b)。对这些元素的地球化学含量采用了窗口法(正方形窗口)计算的奇异性指数 α 值分布图,选择最大尺度 $r_{\max} = 15$ km(即正方形半边长)或 30 km(即正方形边长)。图 3 是由 As 地球化学值计算的奇异性指数 α 值分布图。从图中可见, $\alpha < 2$ 的地区主要分布于 SMB 的南部具有 NNW—SSE 向线性模式地段或环绕 SMB 的接触部位,尤其是断层交汇部位或花岗岩体相变过渡地带。具有较小的值的那些地段显示出与金矿床空间位置较强的空间相关性。这是不足为奇的,因为区内金矿成矿作用造成的砷在岩石中的富集,进而由于分化作用产生土壤和湖泊沉积物中的富集。由 Cu、Pb 和 Zn 元素所计算的奇异性指数值($\alpha < 2$)的空间模式同样突出显示了 Cu、Pb 和 Zn 元素线性地球化学异常与线性构造交汇以及 SMB 岩相变化的空间相关关系。

为了查明已知矿床位置和 As、Cu、Pb 和 Zn 元素奇异性模式之间的空间相关关系,作者进行了两

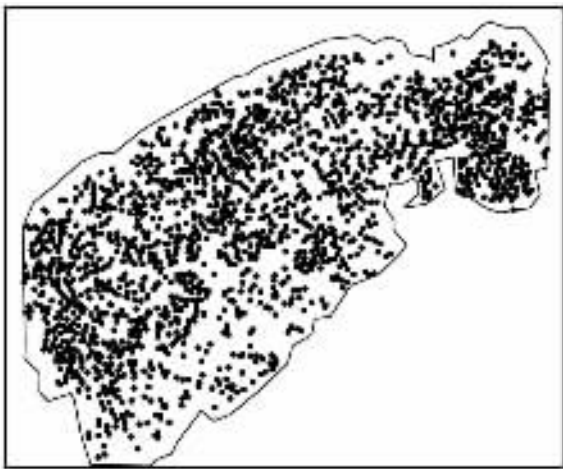


图 2 加拿大 Nova Scotia 省西南部地区湖泊沉积物地球化学取样点分布($N=1\ 948$)(数据来自加拿大 Nova Scotia 省能源部矿产资源处)

Fig. 2 Location of the lake sediment geochemical samples ($N=1\ 948$), southwestern Nova Scotia, Canada

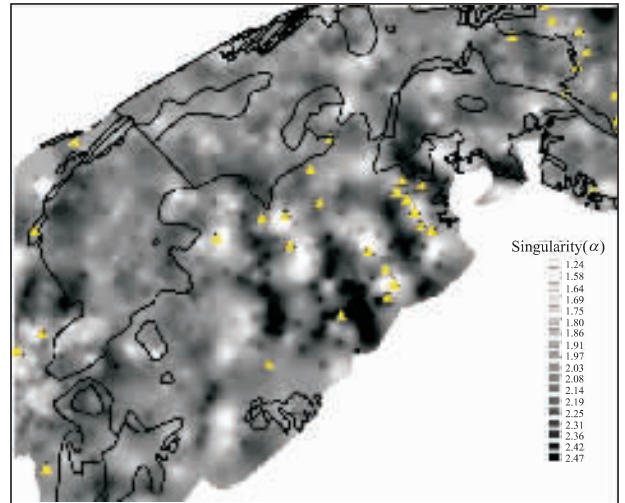


图 3 砷的奇异性指数 α 值分布

Fig. 3 Estimated singularity values (α) for As
圆点表示金矿床,多边形表示 SMB 和早期和晚期的花岗岩相

种类型的统计分析。首先,采用 GSI 技术将每一个矿床(点)的位置与 As、Cu、Pb 和 Zn 元素奇异性模式之间联系。然后统计矿床(点)出现在 $\alpha < 2$ 和 $\alpha > 2$ 区域的频率。结果表明,三成的矿床(点)分布在具有 As、Cu、Pb 和 Zn 富集或正奇异性($\alpha < 2$)的地段;只有 7%的矿床(点)位于 As、Cu、Pb 和 Zn 贫化或负奇异性($\alpha > 2$)的地段,换句话说,93%的矿床(点)分布在至少有一种元素富集的地段。其次,还运用证据权法(weights of evidence method,简称 WofE)(Bonham-Carter, 1994)来评价矿床(点)位置和奇异性值之间的空间相关关系。奇异性值被分成多个类别。每一类在累积基础上用 WofE 来测试。采用空间相关关联性指标 C/S(C)计算了由不同阈值形成的二态图与矿床(点)分布的相关关系。结果表明 113 个矿床(点)位置与 $\alpha < 2$ 的模式具有明显空间相关性。例如,地球化学图上 $\alpha < 2$ 的地区占区域总面积还不到 50%,但却容纳了 107 个矿床(点)中的 66 个(6 个没有奇异性值),因此 $C/S(C)=3.16$ 。

2.2 应用 S-A 方法分离异常和背景

应用 S-A 方法,对 As、Cu、Pb 和 Zn 元素含量克里金图进行了处理和分解。这里只给出 As 的结果。首先用傅立叶变换将克里金图(成秋明,2001a,图 3)转换到频率域内,从能谱密度 $S(\omega)$ 分布图(图 4)中可见,在靠近中心处($\omega=0$)的密度值 S 相对较高,这表明砷的低频信号能量密度较大,也说明研究区内 As 含量较低的区域面积相对较大。图 4 中远离中心($\omega=0$)的范围 S 值相对较低。在双对数图

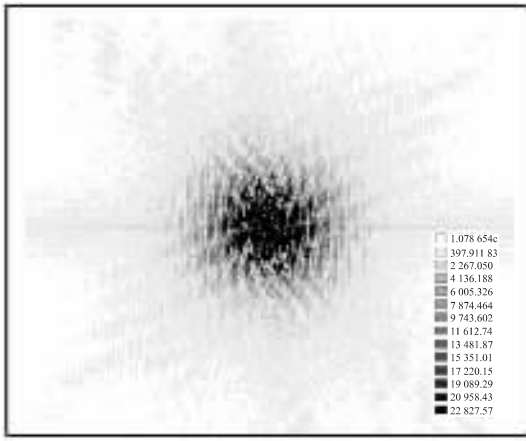


图 4 在 GeoDAS GSI (Cheng, 2000b)软件中使用快速傅立叶变换(FFT)计算所得的能谱密度分布(图的中心处波数为 0)

Fig. 4 Power energy spectrum calculated using fast Fourier transform (FFT) implemented in GeoDAS GSI (Cheng, 2000b). The center of the map is where wave number equals zero. It is a two-dimensional function of wave numbers in horizontal and vertical axes

上, S 和 $A(\geq S)$ 的结果呈 3 条直线关系(图 5)。采用最小二乘法对这些数据进行拟合可以确定 3 个取值区间: $(-125\ 284)$ 、 $(125\ 284 - 178\ 129)$ 和 $(178\ 129 -)$ 。每个这样的区间上 $S-A$ 呈幂律关系。3 条直线的斜率分别为 -1.966 、 -2.85 、 -1.17 , 截距分别为 26.6 、 36.9 和 16.6 。最后一条直线段所对应的 S 分布区间较短, 我们仅取中间阈值 $125\ 284$ 作为阈值将能谱密度(S)的分布图分成 2 个不同的区域($S > 125\ 284$ 和 $S < 125\ 284$)。这两个区域进一步作为两个滤波器用于对 A_s 空间模式的分解。这两个滤波器代表了在能谱平面内波数的不同集合, 它们的形状是不规则的, 而且保持了各向异性和二维能谱密度分布的结构。在 $S-A$ 图中应用这两个滤波器滤波, 然后将它们反变换到空间域中, 其结果见图 6 和图 7。由异常滤波器 $S < 125\ 284$ 所得的结果(图 7)主要反映的是原始砷含量的高频成分, 这包含了砷的局部异常含量, 也可能混杂了与插值有关的随机噪声。背景滤波器所得的结果图是砷含量的背景成分(图 6)。这种较高的背景变化也许代表了 Au 成矿的有利地质背景, 可能反映 Goldenville 组和 Halifax 组地层的有利成矿地段以及它们的接触部位。这些岩石中富含砷、金和硫化物矿产。把已知金矿床(点)叠加到背景图(图 7)上, 我们可

以清楚地看到绝大多数已发现的金矿床(点)落在高砷背景的区域。因此, 高砷背景的地区也许指示了金矿床勘查的有利地区。应用图 5 中定义的异常滤波器所得到的异常结果图(图 7)表明, 具有明显方向性分布的局部异常分布与已知金矿床(点)分布位置具有良好的空间相关性。这些局部异常地段可能与发育于 SMB 南部浅变质沉积岩中的 NW 向构造

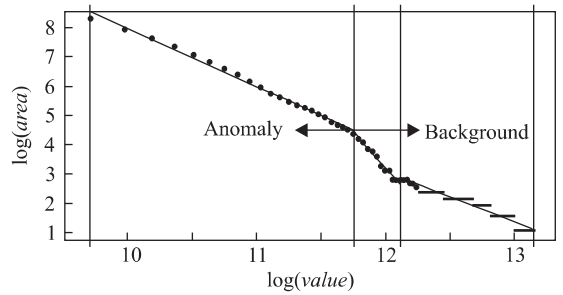


图 5 能谱密度-面积($S-A$)双对数图

Fig. 5 $S-A$ plot showing relationship between power energy spectrum S and $A(>S)$ on log-log paper

本结果由 GeoDAS 软件(Cheng, 2000b)计算所得。在能谱密度的 3 个区间 $(-125\ 284)$ 、 $(125\ 284 - 178\ 129)$ 和 $(178\ 129 -)$ 上使用最小二乘法拟合直线段。这 3 条直线段的斜率分别为 -1.966 、 -2.85 、 -1.17 , 截距分别为 26.6 、 36.9 和 16.6 。以 $125\ 284$ 为阈值定义 2 个滤波器: 异常滤波器, $S < 125\ 284$; 背景滤波器, $S > 125\ 284$

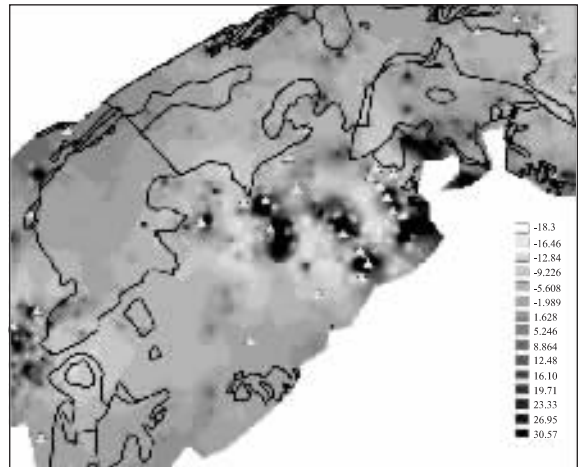


图 6 用图 5 中所定义的背景滤波器滤波并经傅立叶逆变换得到的砷背景分布

Fig. 6 Background component decomposed from the A_s power spectrum density map using inverse Fourier transform with background filter as defined in Fig. 5

图中圆点表示金矿床(点), 暗色图案表示 A_s 高背景区

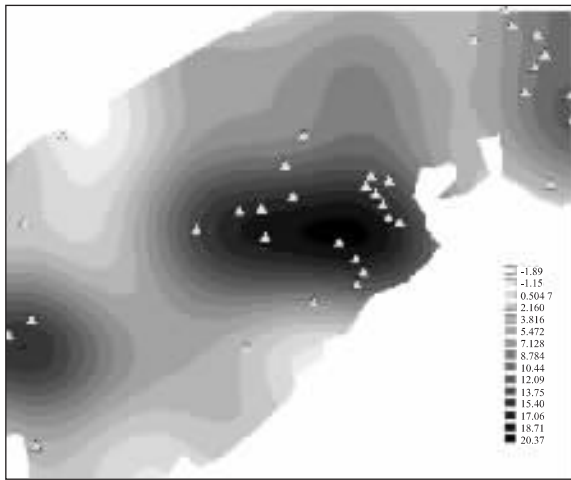


图 7 用图 5 中所定义的异常滤波器滤波并经傅立叶逆变换所得到的砷异常

Fig. 7 Anomalies decomposed from As power spectrum density map using inverse Fourier transform with anomaly filter as defined in Fig. 5

图中圆点表示金矿床, 暗色图案表示高异常(10^{-6})

分布有关. 这些构造也是控制 Au 矿分布的重要因素. 更详细的地质解释请参考文献 Xu and Cheng (2001).

3 结论

尺度不变性: 自相似性(各向同性)、自仿射性(呈层性)、广义自相似性(各向异性)已在许多类型的地质模式中被观察到, 例如岩石样品和表层介质(冰积物、土壤、腐殖质和水)中的元素含量分布、矿床的空间分布、断层的空间分布和地震的出现等. 尺度不变性和广义自相似性可能是地质学中普遍存在的现象. 度量广义自相似性不仅有利于研究地质现象的特征, 而且有利于对复杂现象的识别, 用于地质勘查数据的处理中是合理的和有前景的.

一种新发展起来的异常分解思路(如 S-A 方法, C-A 方法, MSVD 方法)(Cheng, 1994, 2001b; 李庆谋和成秋明, 2004): 利用地质现象的广义标度不变性(广义自相似性)对地球化学数据空间模式进行定量处理是有意义的. 它不仅能对不同深度地质体引起的各向同性的异常进行分离, 而且也能对更加一般化的地质过程引起的各向异性的异常进行分离, 例如区分由矿化作用引起的局部地球化学异常与区域背景场. 在多重分形中定义的奇异性指数度量了空间模式的局部结构性质. 正奇异的

段($\alpha < 2$)对应于由于矿化作用或其他局部地质过程而引起的元素富集地段; 负奇异的段($\alpha > 2$)对应于元素亏损的地区; 无奇异的地区对应于背景场. 背景场在地球化学图中所占范围较大. 由 S-A 分解所得到的异常地段与奇异性地段是一致的. 这说明这两种方法从不同角度刻画了地球化学异常. 对加拿大 Nova Scotia 省西南地区的研究表明, 研究区中砷局部异常可能是由金矿化作用引起的, 奇异性分析和 S-A 方法相结合为识别和分离异常提供了有效的工具.

致谢: 感谢博士生陈志军对本文的翻译工作.

References

- Agterberg, F. P., 1995. Power-law versus lognormal models in mineral exploration. In: Mitri, H. S., ed., Computer applications in the mineral industry. Proceedings of the third Canadian conference on computer applications in the Mineral Industry, 17-26.
- Agterberg, F. P., Cheng, Q., Wright, D., 1993. Fractal modeling of mineral deposits. Proceedings XXIV APCOM, October 31 - Nov. 3, 1993, Montreal, Quebec, 43-53.
- Bonham-Carter, G. F., 1994. Geographic information system for geosciences; Modelling with GSI. Pergamon Press, Oxford, 398.
- Broadgate, M., Cheng, Q., Hayward, N., et al., 2001. Using fractals and power laws to predict the location of mineral deposits. In: John, H., ed., Proceedings of mathematics-in-industry study group workshop, Jan. 29-Feb. 2, 2001, Adelaide, Australia, 91-98.
- Chatterjee, A. K., 1983. Metallogenic map of Nova Scotia, version 1, scale 1 : 500 000. Department of Mines and Energy, Nova Scotia, Canada.
- Cheng, Q., 1994. GSI-based methods for mineral resource assessment; Mitchell-Sulphurest area, Canada. Ph. D. dissertation; University of Ottawa, 268.
- Cheng, Q., 1999a. Multifractal interpolation. In: Lippard, S. J., Naess, A., Sinding-Larsen, R., eds., Proceedings of the fourth annual conference of the international association for mathematical geology. Trondheim, Norway, 245-250.
- Cheng, Q., 1999b. Multifractality and spatial statistics. *Computers & Geosciences*, 25(9): 949-961.
- Cheng, Q., 2000a. Interpolation by means of multifractal, kriging and moving average techniques. In: Proceedings of GAC/MAC meeting GeoCanada 2000, May 29 to June, 2, 2000, Calgary. <http://www.gisworld.org/gac>

- gis/geo2000.htm.
- Cheng, Q., 2000b. GeoData analysis system (GeoDAS) for mineral exploration: User's guide and exercise manual. Material for the training workshop on GeoDAS held at York university, Nov. 1 to 3, 2000. 204, www.gsiworld.org/geodat.
- Cheng, Q. M., 2001a. Multifractal and geostatistical methods for exploration geochemical anomaly texture and singularity analysis. *Earth Science—Journal of China University of Geosciences*, 26(2): 161—166 (in Chinese with English abstract).
- Cheng, Q., 2001b. The decomposition of geochemical map patterns on the basis of their scaling properties in order to separate anomalies from background. In: Proceedings of the international statistical institute held in Seoul on August 22—29, 2001.
- Cheng, Q., 2003a. Fractal and multifractal modeling of hydrothermal mineral deposit spectrum; Application to gold deposits in the Abitibi area, Ontario, Canada. *Journal of China University of Geosciences*, 14(3): 199—206.
- Cheng, Q., 2003b. Non-linear mineral exploration model and unconventional mineral resource assessment. *Earth Science—Journal of China University of Geosciences*, 28(4): 445—454 (in Chinese with English abstract).
- Cheng, Q., 2004a. GSI-based fractal anomaly analysis for prediction of mineralization and mineral deposits. In: Jeff, H., Danny, W., eds., A special volume of geological association of Canada on “GSI Technology for Geology”, in press.
- Cheng, Q., 2004b. A new technique for quantifying anisotropic scale invariance and for decomposition of mixing patterns. *Math. Geol.*, 36(3): 345—360.
- Cheng, Q., Agterberg, F. P., Ballantyne, S. B., 1994. The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods. *Journal of Exploration Geochemistry*, 51(2): 109—130.
- Cheng, Q., Xu, Y., Grunsky, E., 1999. Integrated spatial and spectral analysis for geochemical anomaly separation. In: Lippard, S. J., Naess, A., Sinding-Larsen, R., eds., Proceedings of the fourth annual conference of the international association for mathematical geology. Trondheim, Norway 6—11th August, 87—92.
- Harris, J. R., Wilkinson, L., Grunsky, E., et al., 1999. Techniques for analysis and visualization of litho-geochemical data with application to Swayze Greenstone Belt, Ontario. *Journal of Geochemical Exploration*, 67(1—3): 301—344.
- Li, Q. M., Cheng, Q. M., 2004. Fractal singularity decomposition method and anomaly reconstruction. *Earth Science—Journal of China University of Geosciences*, 29(1): 108—119 (in Chinese with English abstract).
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 1985. Generalized scale invariance and fractal models of rain. *Water Resources Research*, 21(8): 1233—1250.
- Rogers, P. J., Mills, R. F., Lombard, P. A., 1987. Regional geochemical study in Nova Scotia. In: Bates, J., MacDonald, D. R., eds., Mines and mineral branch, Report of activities, 1986, 147—154.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1991. Nonlinear variability in geophysics. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, The Netherlands, 318.
- Turcotte, D. L., 2002. Fractals in petrology. *Lithos*, 65: 261—271.
- Xu, Y., Cheng, Q., 2001. A multifractal filter technique for geochemical data analysis from Nova Scotia, Canada. *J. Geochemistry: Exploration, Analysis and Environment*, 1(2): 147—156.
- Yu, C. W., 2002. Complexity of earth systems—fundamental issues of earth sciences (I). *Earth Science—Journal of China University of Geosciences*, 27(5): 509—519 (in Chinese with English abstract).
- Zhao, P. D., Chen, Y. Q., 2001. Geo-anomaly; Extreme value distribution in geology and its applications in quantitative assessment of mineral resources. In: Bulletin of the Int. Stat. Inst., 53rd Session, Seoul on August 22—29, 2001, invited paper, book2, 477—480.
- Zhao, P. D., 1998. Geonomaly and mineral prediction: Modern mineral resource assessment theory and method. Geological Publishing House, Beijing, 300 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献

- 成秋明, 2001a. 多重分形与地质统计学方法用于勘查地球化学异常空间结构和奇异性分析. *地球科学——中国地质大学学报*, 26(2): 161—166.
- 成秋明, 2003b. 非线性矿床模型与非常规矿产资源评价. *地球科学——中国地质大学学报*, 28(4): 445—454.
- 李庆谋, 成秋明, 2004. 分形奇异值分解方法与异常重建. *地球科学——中国地质大学学报*, 29(1): 108—119.
- 於崇文, 2002. 地球系统复杂性—地球科学的基础问题. *地球科学——中国地质大学学报*, 27(5): 509—519.
- 赵鹏大, 1998. 地质异常与矿床预测: 现代矿产资源评价理论与方法. 北京: 地质出版社, 300.