广义自相似性原理与模型

曹　黎[1], 成秋明[2], 陈志军[2], 严光生[1]

1. 中国地质调查局, 北京　100037
2. 中国地质大学地质过程与矿产资源国家重点实验室, 湖北武汉　430074

摘要: 为了理解各式各样的具有广义自相似性特征的尺度不变性系统, 提出了 1 个称之为 GSI(generalized scale invariance) 的理论体系. 它阐述了大小尺度可以相互关联而不需要引入任何 1 个特有(具体) 尺度的最普通情形. 在二维线性 GSI 理论的基础上, 形成了 2 个重要的各向异性尺度不变性量化模型: SIG(scale invariant generator) 模型和 *S-A*(spectrum-area) 模型. SIG 模型通过在频率域中估计 GSI 理论中代表旋转和层化程度的尺度不变性生成元的参数来量化各向异性尺度不变性. 而 *S-A* 模型通过从二维频率域中能谱密度大于 P 元素集的面积与 P 之间关系的非参数模型对各向异性尺度不变性进行量化. 如果研究的对象是 1 个混合模式(多个不同尺度的过程或作用叠加而形成的), *S-A* 模型不仅可以对异性尺度不变性进行量化, 还可以对该混合模式进行分解. 系统阐述了 GSI 理论、SIG 模型和 *S-A* 模型, 并将 SIG 模型和 *S-A* 模型结合提出了既能对混合模式进行分解又能对分解后模式的各向异性尺度不变性进行量化的模型.

关键词: 广义自相似性(各向异性尺度不变性); GSI; SIG; *S-A*.
中图分类号: P628　　文章编号: 1000－2383(2009)02－0270－05　　收稿日期: 2008－10－24

Generalized Self-Similarity Theory and Models

CAO Li[1], CHENG Qiu-ming[2], CHEN Zhi-jun[2], YAN Guang-sheng[1]

1. *China Geological Survey Bureau, Beijing 100037, China*
2. *State Key Laboratory of Geological Processes and Mineral Resources, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China*

Abstract: In order to understand various anisotropic scale invariance systems, the generalized scale invariance (GSI) concept was brought forward to present a formalism stating the most general conditions under which large and small scales can be related. Two different anisotropic scale invariance quantification models were developed: the scale invariant generator (SIG) model quantifies anisotropies by estimating the GSI generator in frequency domain, a form of scale transformation defined in GSI representing how the scaling field is stratified and how it rotates, and the family of balls that best describes the scaling field; the spectrum-area (*S-A*) model quantifies anisotropies by estimating the anisotropic scaling exponent defined in GSI through a power-law function representing the relationship between area of the set with spectral energy density above P on the 2D frequency domain and P. *S-A* is not only an anisotropic scale invariance quantification technique but also a mixing data decomposition technique, which can decompose mixing data into multiple components based on anisotropic scaling properties in frequency domain. This paper introduces the GSI concept, the SIG model and *S-A* model systematically and proposes an idea to combine the SIG model and *S-A* model so that the new combined model can not only decompose mixing data into multiple components but also quantify the decomposed components' anisotropic scale invariance as well.

Key words: anisotropic scale invariance; generalized scale invariance; scale invariant generator; spectrum-area.

尺度不变性(scale invariance) 包括自相似性(各向同性)、自仿射性(成层结构)和广义自相似性(各向异性尺度不变性)(Cheng, 1999, 2001b, 2004). 近些年, 越来越多的地学研究者开始认识到尺度不变性的重要作用, 并对其进行了大量的研究, 但这些研究往往集中在自相似性和自仿射性, 对广

基金项目: 中国地质调查局项目"重要矿产资源三维预测评价方法与示范"(No. 1212010633810); 教育部创新团队基金(No. IRT0755); 国家自然科学基金项目(Nos. 40638041, 40502029); 地质过程与矿产资源国家重点实验室科技部专项经费资助.
作者简介: 曹黎(1981－), 男, 从事信息化项目管理工作. E-mail: cli@cgs.gov.cn

义自相似性研究较少. Lovejoy and Schertzer(1985)指出，尺度不变性是无处不在的，因为它是动力学的基本属性. 而在现实当中，几乎没有哪个具有尺度不变性特征的域(以下简称尺度域)是各向同性的. 比如，大气领域的很多域会因“科里奥利力”而产生差异化旋转. Lovejoy *et al*. (1987)发现三维雷达雨水反射率具有各向异性尺度不变性特征. Fox and Hayes(1985)观察到海洋测深的尺度不变性也是各向异性的. 此外，还有大量的地球物理研究域具有很强的各向异性尺度不变性特征(Schertzer and Lovejoy, 1991；成秋明, 2001a)，如地震中的断裂面等. 因此，研究广义自相似性非常必要.

为了更好地认识和理解尺度域，特别是那些具有各向异性尺度不变性(广义自相似性)特征的域，许多科学家做了大量的研究，提出了一系列理论和数据分析模型(Agterberg *et al*., 1993). Lovejoy and Schertzer(1985)提出了 1 个称之为 GSI(generalized scale invariance)的理论体系. 它阐述了大小尺度可以相互关联而不需要引入任何 1 个特有(具体)尺度的最普通情形. 在此基础上，Lewis *et al*. (1999)提出了 SIG(scale invariant generator)数据分析模型. 它可以通过估计 GSI 理论中代表旋转和层化程度的尺度不变性生成元的参数来量化各向异性尺度不变性. 从多重分形理论出发，Cheng *et al*. (1994)提出了 *C-A* 分形模型，在尺度域度量广义自相似性之后，Cheng *et al*. (1999, 2000)又将 *C-A* 思想应用于频率域提出了 *S-A*(spectrum-area)的多重分形模型. 该模型的提出，主要是通过确定不同广义自相似性来分解复合场(多个不同尺度的过程或作用叠加而形成的). Cheng(2004)进一步从线性 GSI 形式推导出了 *S-A* 与 GSI 的内在联系. *S-A* 表达二维频率域(傅立叶空间)中能谱密度大于 *P* 元素集的面积(*A*)与 *P* 之间关系的幂律函数，因而可以量化各向异性尺度不变性. 一系列实验证明，由于 *S-A* 模型不受变换参数限制，*S-A* 比 GSI 模型更具有普适性，不仅对线性而且对非线性尺度不变性场同样适用. 如果研究的对象是 1 个混合场，*S-A* 模型不仅可以对异性尺度不变性进行量化，还可以对该混合场进行分解.

SIG 模型和 *S-A* 模型是研究各向异性尺度不变性的两个非常重要的模型. 它们都建立在 GSI 理论基础之上，但它们量化各向异性尺度不变性的方式却不同. Cao(2005)探讨了 GSI 理论、SIG 模型、*S-A* 模型的关系，并将 SIG 模型和 *S-A* 模型结合进行了 SIG 算法的优化. 本文在此基础上介绍将 SIG 和 *S-A* 模型联合使用的方法，以实现在研究混合场时，既能对混合模式进行分解，又能更好地量化各向异性尺度不变性.

1　GSI(generalized scale invariance)理论

Lovejoy and Schertzer(1985)提出的 GSI 理论体系阐述了大小尺度可以相互关联而不需要引入任何 1 个特有(具体)尺度的最普通情形. 它用向量的长度来衡量尺度. 不同尺度的向量通过 1 个尺度变换算子来相互关联，而这个算子仅仅依赖于向量间长度的比.

1 个 GSI 系统包括 3 个要素：(1) 1 个单位球(用来定义单位向量)；(2) 1 个尺度变换算子 $\boldsymbol{T}_\lambda$(它通过尺度比 λ 来实现对向量尺度的变换)；(3) 1 个尺码度量器(1 个向量可以通过定义 1 个尺码度量器 ϑ 来与 1 个尺码相关联). 假设 3 个要素中的(1)和(2)都存在，一簇开放的球 B_λ 可以被定义成如下形式：

$$\forall \boldsymbol{x}: f_\lambda(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}\boldsymbol{x});$$

$$B_\lambda = \{\boldsymbol{x}; f_\lambda(\boldsymbol{x}) < 1\}.$$

这样的定义意味着：所有落在相同球 ∂B 上的向量 $\boldsymbol{x}$ 都有相同的尺码(Lewis *et al*., 1999).

在二维线性 GSI 形式中，尺度不变性在 x 轴方向上的尺度变化比与在 y 轴方向上的尺度变化比可能是不一样的. 尺码度量器和所度量尺度之间的关系可以定义为：$M(\boldsymbol{T}_\lambda) = M(\lambda^{\boldsymbol{G}})$，其中尺度变换算子 $\boldsymbol{T}_\lambda = \lambda^{\boldsymbol{G}}$. 这里的 $\boldsymbol{G}$ 叫做生成元. 它是 1 个 2×2 的矩阵，可以写成基本二维矩阵线性组合的形式：

$$\boldsymbol{G} = d\boldsymbol{L} + c\boldsymbol{K} + f\boldsymbol{J} + e\boldsymbol{I},$$

其中：$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，因而 $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} d+c & f+e \\ f-e & d-c \end{pmatrix}$. 在生成元 $\boldsymbol{G}$ 中，c 用来衡量 x、y 两个坐标轴方向上相对尺度不变性的大小. 当 c 等于 0 时，x 轴和 y 轴方向上的尺度不变性相等. 当 c 从 0 开始增加，x 轴相对 y 轴方向上的尺度不变性不断增加；当 c 从 0 开始减少，y 轴相对 x 轴方向上的尺度不变性不断增加. f 代表双轴在对角线上的反映. e 用来衡量旋转的程度. 如果 e 是正值，球进行顺时针旋转；如果 e 是负值，球进行逆时针旋转. d 代表整体收缩程度. 在二维线性 GSI

形式中,不存在整体收缩,因此 d 永远等于 1.

在一些地球物理应用中,1 个域结构函数 $S(\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x})=\langle[f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})]^2\rangle$ 的尺度不变性函数 $f(\boldsymbol{x})$ 经常作为 1 个重点研究对象($\boldsymbol{x}$ 是 1 个位置向量,$\Delta\boldsymbol{x}$ 是相对 $\boldsymbol{x}$ 的 1 个落差,'〈〉'代表整体平均值).如果 1 个尺度域"在统计上是转换不变的",那么它的结构函数将独立于 $\boldsymbol{x}$,并且以下方程将成立:$S(\boldsymbol{T}_\lambda\Delta\boldsymbol{x})=\lambda^{-\xi}S(\Delta\boldsymbol{x})$ (这里 ξ 指的是尺度幂).假设"统计上转换不变",在傅立叶空间研究尺度不变性将变得很方便(Lewis, 1993).

在这种情形下,能谱密度(傅立叶空间振幅平方的模数,即 $P(\boldsymbol{k})=|F(\boldsymbol{k})|^2$, $F(\boldsymbol{k})$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的傅立叶转换,$\boldsymbol{k}$ 是波数) 是 1 个具有尺度不变性特征的值.如果 1 个尺度域的结构函数满足方程 $S(\boldsymbol{T}_\lambda\Delta\boldsymbol{x})=\lambda^{-\xi}S(\Delta\boldsymbol{x})$,那么这个域的能谱密度将有如下属性:$\langle P(\boldsymbol{T}_\lambda\boldsymbol{k})\rangle=\lambda^{-s}\langle P(\boldsymbol{k})\rangle$. $\boldsymbol{T}_\lambda=\lambda^{G}$ 是傅立叶空间的尺度变换算子,可以被定义为如下形式:

当 $a^2>0$,

$\boldsymbol{T}_\lambda=\lambda^d$ 。

$$\begin{pmatrix}\cosh(au)+\dfrac{c}{a}\sinh(au) & \dfrac{f+e}{a}\sinh(au)\\ \dfrac{f-e}{a}\sinh(au) & \cosh(au)-\dfrac{c}{a}\sinh(au)\end{pmatrix};$$

当 $a^2<0$,

$\boldsymbol{T}_\lambda=\lambda^d$ 。

$$\begin{pmatrix}\cos(au)+\dfrac{c}{a}\sin(au) & \dfrac{f+e}{a}\sin(au)\\ \dfrac{f-e}{a}\sin(au) & \cos(au)-\dfrac{c}{a}\sin(au)\end{pmatrix}.$$

$a^2=c^2+f^2-e^2$, $s=\xi+D_{el}$ 是各向异性尺度幂(D_{el} 叫做椭圆维数,代表空间的有效维数).在二维线性 GSI 形式中,$D_{el}=2d=2$. $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^T$ 是傅立叶空间的生成元,在线性的情况下,它是真实空间生成元的转置.既然方程 $\langle P(\boldsymbol{T}_\lambda\boldsymbol{k})\rangle=\lambda^{-s}\langle P(\boldsymbol{k})\rangle$ 是应用在位置向量 $\boldsymbol{k}$ 上而不是相对向量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 上,那么球簇就可以给 1 个物理上的解释:球的周界上能谱密度保持不变,所以球也可以定义成被周线 $\langle P\rangle$ 包围的体积(面积).每 1 个球将对应 1 圈周线 $\langle P\rangle$ 和 1 个 B_{λ_1} 和 $\langle P_{\lambda_1}\rangle$ 值,且 B_{λ_2} 和 $\langle P_{\lambda_2}\rangle$ 之间的关系是:

$\langle P_{\lambda_2}\rangle=\lambda^{-s}\langle P_{\lambda_1}\rangle$.这个方程对于任意一对周线 $\langle P\rangle$ 都是成立的.

2 SIG(scale invariant generator) 模型

SIG 模型通过估计 GSI 中尺度不变性生成元的参数以及能最好表现所研究域的球簇来量化二维域的各向异性尺度不变性.一旦尺度不变性生成元参数和球簇被估计出来,x、y 两轴方向上相对尺度不变性的大小以及尺度是如何旋转的就都清楚了,相应地,空间域的一些有用信息也可以很好地被提取出来.

估计 GSI 参数的过程可以看作 1 个非线性统计回归.也就是说,拿 N 个能谱密度数据点 $P(k_i)$ 去拟合 1 个理论函数.在估计参数的时候,我们经常使用最小二乘法,通过最小化误差函数 $E^2_{\mathrm{SIG}}\geqslant E^2(\boldsymbol{G})=\dfrac{1}{n}\sum_{i,j}[\ln P(\lambda_i^{G}k_j)+s\ln\lambda_i-\ln P(k_j)]^2$ 来求得参数.该误差函数中的和涵盖了所有数据点 $P(k_j)$ 和所有可能的不连续的尺度比 λ_i.它们构成了唯一的一对 $[P(k_j), P(\lambda_i^{G}k_j)]$.具体地讲,所要研究的域首先通过傅立叶变换,由空间域转到频率域,并且求得能谱密度.由于 $E(\boldsymbol{k})\sim k^{-\beta}$ (或 $\ln E(\boldsymbol{k})=-\beta\ln\boldsymbol{k}+\alpha$),各向异性尺度幂 s 可以通过 $s=\beta+1$ 求得(β 是各向同性光谱斜率,各向同性能量密度 $E(\boldsymbol{k})$ 可以通过将 $\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{k}|$ 保持不变的一圈上的 $P(\boldsymbol{k})$ 求和而获得).生成元参数(c, f, e) 第一次的估计值可以通过 raving 搜索而获得.然后用第一次估计得到的值对 E^2 作抛物面扩展.生成元参数(c, f, e) 的最终估计值取抛物面的最低点.用得到的生成元参数可以对 P 进行增强.最后,单位球可以通过将某一值域内的点拟合成一条曲线的方式获得,进而通过尺度变换,画出一组球来.

3 *S-A* (spectrum-area) 模型

在多重分形理论研究基础上,Cheng *et al*. (1994) 提出了密度-面积分形模型,该模型显示具有奇异性的场在奇异性范围场密度与面积服从分形分布,该模型在地学勘查数据处理中得到了广泛应用.Cheng *et al*. (1999) 进一步将该模型思想推广到频率域中,将能谱密度与面积建立了 *S-A* 模型,该模型可以度量更广义尺度不变性和广义自相似性. Cheng (2004) 进一步在 GSI 理论假设下,探讨了 *S-A* 模型与 GSI 的关系.如果按 GSI 假设,能谱密度可以表示为 $\langle P(\boldsymbol{T}_\lambda\boldsymbol{k})\rangle=\lambda^{-s}\langle P(\boldsymbol{k})\rangle$,那么,能谱密度

大于 S 的集合的面积 $A(>P)$ 与 P 之间关系服从幂律函数: $A(>P)\propto P^{-2d/s}$ ($\propto$表示成比例, $d=1$ 代表整体收缩程度, s 是各向异性尺度幂) . 如果将 $A(>S)$ 的值和 P 的值作 1 个双对数图, 那么所拟合直线的斜率将等于 $-2/s$. 可以看出, 这个函数独立于 f、c、e. 这意味着两个坐标轴间的相对尺度不变性和旋转转换并不会改变面积值 $A(>P)$. 说明 S-A 的限定条件较线性 GSI 更宽, 可以用于刻画更广的自相似性. 基于此, Cheng(2004) 提出了广义自相似是指空间领域显示多样性而特征空间中显示自相似性的现象. S-A 模型可以用来度量能谱密度的幂律关系, 通过确定单个还是多个幂律关系来划分不同的波长和能谱分形自相似性. 如果是后一种情况, 我们把这个域叫做不同自相似性混合模式, 然后我们可以在频率域定义 1 个阈值, 构造不同的滤波器, 对这个域进行模式分解, 然后通过反傅立叶变换将分解的域转回空间域以达到对混合场的分解作用, 该方法被广泛应用于地球化学和地球物理异常的分解中.

4　SIG 模型和 S-A 模型结合

地球物理和地球化学领域的很多数据都是多个不同尺度的地质过程和作用叠加而形成的, 笔者把这样的场叫作混合场, 比如有区域性正常地质过程与矿化过程所产生的混合地球化学场是常见的混合场类型. 由于 SIG 模型假设在整个尺度范围里只存在 1 个尺度不变性, 对混合场这样的数据, SIG 模型并不能直接用来量化其各向异性尺度不变性. 混合数据只有当它的不同组分被识别和分解以后才能得到合理地利用. 而 S-A 模型正好可以通过在频率域识别不同的各向异性尺度不变性特征而实现对混合场的分解. 因此, 可以将 S-A 模型和 SIG 模型结合起来, 形成 1 个新的模型, 从而既能对混合模式进行分解, 又能对各向异性尺度不变性进行量化.

这个新的模型可以这样形成:

(1) 首先用 S-A 模型对数据求各向异性尺度幂; (2) 如果在运用 S-A 模型时, 数据的 S-A 模型只存在 1 个幂律关系, 就用 SIG 模型来对该数据的各向异性尺度不变性进行量化(估计生成元参数和单位球) ; (3) 如果在运用 S-A 模型时, 数据的能谱密度存在多个幂律关系, 就先用 S-A 模型中的混合模式分解算法对该数据作模式分解. 分解完后通过反傅立叶变换将各个组分由频率域转回空间域, 然后再用 SIG 模型对分解后各个组分的各向异性尺度不变性进行量化.

5　讨论

GSI 理论是广义自相似性理论研究的 1 个重要成果, 它描述了大小尺度可以相互关联的最普通的情形. SIG 模型是在 GSI 理论基础上开发的参数模型, 目的是找寻广义尺度不变性场的不变换过程, 而 S-A 模型从更一般意义度量广义自相似性并分解混合场, 它们用不同的方式对各向异性尺度不变性进行量化. 这两个模型各有优点又各有不足. SIG 模型可以有效准确地度量各向异性尺度不变性的变换特征, 但却不能处理混合数据和更复杂的数据. S-A 的应用不受线性或非线性 GSI 的限制, 可以识别数据是否属混合数据, 并可以将混合数据分解成不同的组分, 但是它并不能直接反映数据的各向异性尺度不变性的具体变换形式. 将 SIG 模型和 S-A 模型结合使用, 可以发挥各自的优点, 既可以处理混合数据又能有效准确地刻画数据的各向异性尺度不变性的具体变换特征. 由于这些模型可以处理任何二维场或模式, 它完全有可能成为地学领域混合模式分解和量化各向异性尺度不变性的 1 个通用模型.

在这两个模型的算法中, 都需要计算各向异性尺度幂 s, 并且对 s 的估计在这两个模型中都起着非常重要的作用, 因此在合并这两个模型时, 完全可以通过各向异性尺度幂 s 这个量来对这两个模型的准确性进行相互验证, 并且在合并的过程中, 还可以探索通过各向异性尺度幂 s 这个量如何来改进和优化这两个模型的算法.

References

Agterberg, F. P. , Cheng, Q. , Wright, D. , 1993. Fractal modeling of mineral deposits. In: Proceedings XXIV APCOM, October 31 — November 3, 1993. *Montreal, Quebec*, 1: 43—53.

Cao, L. , 2005. Quantification of anisotropic scale invariance from 2D fields for decomposition of mixing patterns: (Dissertation) . York University, Toronto, Ontario, 140.

Cheng, Q. M. , 1999. Spatial and scaling modelling for geochemical anomaly separation. *J. of Geochem. Explor.*, 65(3) : 175— 194.

Cheng, Q. M. , 2001a. Spatial self-similarity and geophysical and geochemical anomaly decomposition. *J. Geophys.*

Prog., 16(2): 8－17 (in Chinese with English abstract).

Cheng, Q. M., 2001b. Self-similarity/self-affinity and pattern recognition techniques for GIS analysis and image processing. In: IAMG2001 Meeting, Cancun, Mexico, September 6－12, 2001 (6 pages on CD).

Cheng, Q. M., 2004. A new model for quantifying anisotropic scale invariance and for decomposition of mixing patterns. *Mathematical Geology*, 36(3): 345－360.

Cheng, Q. M., Agterberg, F. P., Ballantyne, S. B., 1994. The separation of geochemical anomalies from background by fractal methods. *J. Geochem. Explor.*, 51(2): 109－130.

Cheng, Q. M., Xu, Y., Grunsky, E., 1999. Integrated spatial and spectrum analysis for geochemical anomaly separation. In: Lippard, J. L., Naess, A., Sinding-Larsen, R., eds., Proceedings of the International Association of Mathematical Geology Meeting. Trondheim, Norway I, 87－92.

Cheng, Q. M., Xu, Y., Grunsky, E., 2000. Integrated spatial and spectrum method for geochemical anomaly separation. *Nat. Resour. Res.*, 9(1): 43－52.

Fox, C. G., Hayes, D. E., 1985. Quantitative methods for analyzing the roughness of the seafloor. *Rev. Geophys.*, 23(1): 1－48.

Lewis, G. M., 1993. The scale invariant generator technique and scaling anisotropy in geophysics: (Dissertation). McGill University, Montreal, Que., 120.

Lewis, G. M., Lovejoy, S., Schertzer, D., et al., 1999. The scale invariant generator technique for quantifying anisotropic scale invariance. *Comp. Geosci.*, 25(9): 963－978.

Lovejoy, S., Schertzer, D., 1985. Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain. *Water Resour. Res.*, 21(8): 1233－1250.

Lovejoy, S., Schertzer, D., Tsonis, A. A., 1987. Functional box-counting and multiple dimensions in rain. *Science*, 235(4792): 1036－1038.

Schertzer, D., Lovejoy, S., 1991. Nonlinear variability in geophysics－Scaling and fractals. Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 318.

附中文参考文献

成秋明, 2001a. 空间自相似性与地球物理和地球化学场的分解方法. 地球物理学进展, 16(2): 8－17.