

doi:10.3799/dqkx.2013.038

频率域反射波全波形速度反演

成景旺^{1,2}, 顾汉明^{1,2*}, 刘春成³, 刘志斌³

1. 中国地质大学地球物理与空间信息学院, 湖北武汉 430074

2. 中国地质大学构造与油气资源教育部重点实验室, 湖北武汉 430074

3. 中海油研究总院, 北京 100027

摘要: 全波形反演不仅利用相位和振幅信息, 还利用波形的细节变化, 具有刻画模型精确细节的能力. 在对稀疏矩阵直接 LU 分解求解的基础上, 采用梯度预处理方法对声波介质速度模型进行了反射波全波形反演. 采用误差反向传播算法计算目标函数梯度以及伪 Hessian 矩阵的对角线元素来做梯度预处理. 数值模型的实验结果表明, 利用有效的频率段便能反演出分辨率较高的速度结构, 用低频反演出的结果作为高频反演的初始模型, 减少了解的非唯一性. 二维高斯光滑初始模型提供了有利的低频信息, 得到较好的反演结果. 伪 Hessian 矩阵的预处理吸收了高斯牛顿法的二次收敛优势, 在不增加计算量的前提下, 加快收敛速度.

关键词: 全波形反演; 梯度预处理; 误差反向传播算法; 伪 Hessian 矩阵.

中图分类号: P631.4

文章编号: 1000-2383(2013)02-0391-07

收稿日期: 2012-04-15

Full Waveform Inversion for Velocity Structure from Reflected Wave Seismic Data in the Frequency Domain

CHENG Jing-wang^{1,2}, GU Han-ming^{1,2*}, LIU Chun-cheng³, LIU Zhi-bin³

1. Institute of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China

2. Key Laboratory of Tectonics and Petroleum Resources of Ministry of Education, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China

3. CNOOC Research Center, Beijing 100027, China

Abstract: Full waveform inversion uses not only phase and amplitude information, but also waveform details, revealing precise details of the model. We use the LU factorization technique directly to solve the forward modeling, and show a preconditioned gradient method to inverse the velocity structure using the reflected wave from low-frequency to high-frequency in this study. The numerical structure of the finite difference method and back-propagation algorithm is exploited to develop an algorithm that explicitly calculates the Jacobin matrix utilizing a forward model solution. Furthermore, the diagonal elements of the false Hessian matrix are used as the preconditioned operator. Numerical tests on simple synthetic models find that a good velocity model can be obtained only by several frequency inversions, and the strategy of using low-frequency inversion result as the starting model in the high-frequency inversion can greatly reduce the non-uniqueness of their solutions. The initial model directly affects the imaging result. The smooth two-dimensional Gaussian model provides favorable low-frequency information for a better inversion result. The fast convergence can be achieved by using of the false Hessian matrix without any increase in the premise of computation.

Key words: full waveform inversion; preconditioned gradient; back-propagation algorithm; false Hessian matrix.

利用人工地震获取的地震波信息反演地下介质物性参数是地球物理学的重要研究内容. 地震波在从炮点到接收点的传播过程中, 会经过地下不同的

介质. 由于介质本身的不同物理性质, 地震波的振幅、相位(走时)以及频谱都会发生变化, 通过对这些变化信息进行反演, 可以获得地下介质的弹性参数,

基金项目: 国家重大科技专项(No. 2011ZX05025-001).

作者简介: 成景旺(1987-), 男, 博士, 研究方向为石油地震勘探反演研究. E-mail: chjw2008@126.com

* 通讯作者: 顾汉明, E-mail: guhanming@263.net

从而推断出其地质构造。

地震波场反演方法很多,如相位反演成像、振幅反演成像以及全波形反演成像。相位反演和振幅反演利用的是波场运动学信息,反演出的速度分布是一种平滑估计值,它是真实速度模型的低频分量,反映的是大尺度的速度结构。而基于波动方程理论的全波形反演利用的是完整的波场信息,反演获得的速度分布则是高频成分,分辨率较高,具有刻画地下介质精细结构的潜力。

全波形反演是一个高度非线性最小二乘问题,求解该问题的最优化反演方法很多。20 世纪 80 年代,直接通过求取模型参数扰动计算 Frechet 导数的工作量极为庞大,使全波形反演仅局限于一维模型或简单模型。Tarantola (1984) 借鉴逆时偏移的思想,通过正向传播波场与残差波场的互相关求取梯度方向,使得全波形反演成为可能。Pratt *et al.* (1998) 根据炮点和接收点可互易性原理,导出了求解目标函数梯度的高效算法,并利用高斯牛顿法对非均匀介质的速度进行了全波形反演。国外近十年中频率域全波形反演已被广泛应用于建立高分辨率的速度模型 (Hicks and Pratt, 2001; Ben-Hadj-Ali *et al.*, 2008; Malinowski and Operto, 2008)。Ha *et al.* (2009) 利用误差反传播算法以及 Huber 函数作为反演目标函数来提高算法的抗噪性和稳定性,对含有各种噪音的理论数据进行了实验。Sourbier *et al.* (2011) 采用直接分解和迭代混合的并行算法进行了三维全波形反演。国内频率域全波形反演研究起步相对较晚,研究者在频率域正演以及全波形反演也做了详细的工作 (许焜和王妙月, 2001, 2004; 吴国忱和梁锴, 2005; 殷文等, 2006; 龙桂华等, 2009; 张荣宗和袁诚, 2009; Bian and Yu, 2011)。

本文在基于 25 点有限差分正演的基础上,采用预条件梯度法进行了全波形反演,并引入正则化因子来提高该算法的稳定性;采用有效的频率段从低频到高频逐频进行反演,在不同的模型中进行了试算。利用伪 Hessian 矩阵的对角元素作为预处理算子,加快了收敛速度。频率域全波形反演可以精确刻画地下速度结构的细节部分,对地质解释以及储层预测等具有重要意义。

1 基础理论

1.1 频率域波动方程正演模拟

频率域声波波动方程可以表示为:

$$\frac{\omega^2}{k(\mathbf{x})}u(\mathbf{x},\omega) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla u(\mathbf{x},\omega) \right) = -s(\mathbf{x},\omega), \quad (1)$$

其中: $\rho(\mathbf{x})$ 为密度; $k(\mathbf{x})$ 为体变模量; ω 为角频率; $u(\mathbf{x},\omega)$ 和 $s(\mathbf{x},\omega)$ 分别为波场压力值与震源。将方程(1)加入 PML 边界条件后采用有限差分算子将其离散,则式(1)可简单表示为:

$$\mathbf{A}(\omega)\mathbf{u}(\omega) = -\mathbf{S}(\omega), \quad (2)$$

其中: $\mathbf{A}(\omega)$ 为与频率和介质速度有关的阻抗矩阵。假如模型空间网格数为 (N_x, N_z) ,那么 $\mathbf{A}(\omega)$ 是一个 $(N_x \times N_z) \times (N_x \times N_z)$ 的有限差分算子矩阵。该系数矩阵为大型的稀疏矩阵,其非零元素对称的分布在对角线上,但是其并非对称矩阵,其值的大小是不一样的。求解该大型稀疏矩阵方程组常用的方法有迭代法和直接分解法。对于多震源问题,方程(2)最好的方法是采用直接分解(如 LU 分解)来求解,因为系数矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 只需分解一次,其 LU 分解结果就可以用于更多的新的震源求解上,可以节省大量计算量,而且在全波形反演中的迭代反演上更为重要,因为其有大量的震源以及虚震源求解,每一次迭代过程中系数矩阵 $\mathbf{A}(\omega)$ 不变,其 LU 分解可以多次重复使用。

1.2 频率域全波形反演

反问题的求解在数学上其实是一个最优化求解问题,其中目标函数的构造是一个关键。我们构造如下的目标函数:

$$E(\mathbf{p}) = \sum_s \sum_r \frac{1}{2} \delta \mathbf{d}^T \delta \mathbf{d}^*, \quad (3)$$

其中: \mathbf{p} 为模型变量; N_s 为炮点数; N_r 为接收点数; $\delta \mathbf{d}$ 为计算波场与观测波场的残差;上式中的星号表示复共轭。其中:

$$\delta \mathbf{d} = u_i - d_i, i = 1, 2, \dots, N_r. \quad (4)$$

在目标函数(3)式两边对速度模型变量进行求导,得到目标函数关于速度模型的梯度:

$$\nabla E = \text{Re} \{ \mathbf{J}^T \delta \mathbf{d}^* \}. \quad (5)$$

即目标函数关于速度变量的梯度可以表示为:

$$\nabla_{\mathbf{p}^k} E = \text{Re} \sum_s \left[\frac{\partial u_{s,1}}{\partial p_k} \dots \frac{\partial u_{s,N_r}}{\partial p_k} \dots \frac{\partial u_{s,N}}{\partial p_k} \right] \begin{bmatrix} d_{s,1} \\ \vdots \\ d_{r,N_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^*, \quad (6)$$

式(6)中的 N 为速度模型变量的个数,即 $N = N_x \times N_y$ 。从式(6)中我们看到梯度的求解关键在 Jacobin 矩阵的求解。对式(2)两边模型参数 p_i 进行求导,我

们有:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \mathbf{U} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial p_k} = 0,$$

其中:令 $\mathbf{V}_k = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \mathbf{U}$, 称其为虚震源; $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial p_i}$ 称为关于速度变量 p_i 的偏导数波场. 则有:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial p_k} = \mathbf{V}_k \text{ 或 } \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial p_k} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_k. \quad (7)$$

由于式(7)和式(2)的形式一样, 而且它的阻抗矩阵也一样, 故可以直接利用正演的 LU 分解结果求解偏导数波场. 将(7)式代入(5)式可得:

$$\begin{aligned} \nabla_{p_k} E &= \text{Re} \sum_s \left[\frac{\partial \mathbf{U}_{s,r}}{\partial p_k} \right]^T \tilde{\mathbf{d}}^s = \text{Re} \sum_s [\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}_k]^T \tilde{\mathbf{d}}^s = \\ &= \text{Re} \sum_s \mathbf{V}_k^T [\mathbf{A}^{-1}]^T \tilde{\mathbf{d}}^s, \end{aligned} \quad (8)$$

其中: $[\mathbf{A}^{-1}]^T \tilde{\mathbf{d}}^s$ 为残差的反传播场, 我们只需将各个接收点处的残差组成新的震源再进行正演一次便可得到. 从(8)式, 我们可以看出目标函数对速度变量的梯度可以通过计算虚震源与残差反传播场的零延迟卷积得到.

1.3 预条件梯度法

Pratt *et al.* (1998) 明确指出 Hessian 矩阵在梯度法反演中的比例调节作用, 但计算全 Hessian 矩阵对于大规模非均匀介质来说并不是明智的选择, 而且对于弱均匀介质, Hessian 矩阵的非对角线元素一般很小, 它的对角线元素起主导作用. 利用高斯牛顿法的思想, 我们将迭代寻优的模型更新量表示为:

$$\delta \mathbf{p} = -\alpha (\text{diag} \mathbf{H}_a)^{-1} \nabla E, \quad (9)$$

其中: \mathbf{H}_a 为近似 Hessian 矩阵,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_a &= \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j} = \text{Re} [\mathbf{J}^T \mathbf{J}^*] = \\ &= \text{Re} \left[\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial p_i} (\mathbf{A}^{-1})^T (\mathbf{A}^{-1})^* \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial p_j} \mathbf{U}^* \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

从式(10)中我们不难发现 Hessian 矩阵可以表示成偏导数的互相关, 根据式(7)可求出 Hessian 矩阵, 在式(10)中令 $i=j$ 就可求出它的对角元素. 但从计算量方面考虑, 使用伪 Hessian 矩阵代替近似 Hessian 矩阵来做预处理 (Shin *et al.*, 2001). 频率域伪 Hessian 矩阵的表达式可以表示为:

$$\mathbf{H}_p = \text{Re} \{ \mathbf{V}^T \mathbf{V}^* \}. \quad (11)$$

伪 Hessian 矩阵用到虚震源构成的虚震源矩阵. 故模型更新量(9)式可以变为:

$$\delta \mathbf{p} = -\alpha (\text{diag} \mathbf{H}_p + \lambda \mathbf{I})^{-1} \nabla E.$$

其中: α 为待定的步长, \mathbf{I} 为单位矩阵, λ 为可调节的

正则化因子, 用来提高算法的稳定性. 我们取 λ 的大小为矩阵 \mathbf{H}_p 的所有对角元素的平方和的平方根.

2 数值试验

为了验证该方法的正确性与可行性, 我们设计了非均匀介质模型、复杂模型以及 Marmous 模型三种不同的模型. 从低频到高频依次进行反演, 反演过程中每个频率迭代 20 次, 且每一次低频反演的结果都当作下一次高频反演的初始模型.

2.1 非均匀介质模型

模型网格数为 100×100 , 空间步长为 $\Delta X = 15 \text{ m}$, $\Delta Z = 10 \text{ m}$, 该模型中的背景速度为 2500 m/s , 低速体和高速体的速度大小分别为 2000 m/s 和 3000 m/s (图 1a). 正演过程中震源采用 10 Hz 的雷克子波, 频率间隔为 0.33 Hz , 从 0.33 Hz 开始一共计算 512 个频率切片. 采用地面激发和接收的采集方式, 一共放 50 炮, 炮间距为 30 m , 每一炮均有 100 道接收.

由于采用 PML 边界条件, 故我们将接收点位置放在距离模型边界 5 个网格点处. 初始模型是背景速度为 2500 m/s 的均匀介质模型, 分别使用频率为 $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 \text{ Hz}$ 来进行逐频反演, 其中几个频率的反演结果如图 1 所示.

从图 1 反演结果可以看出, 从低频到高频反演速度模型的分辨率越来越高, 低速体和高速体的轮

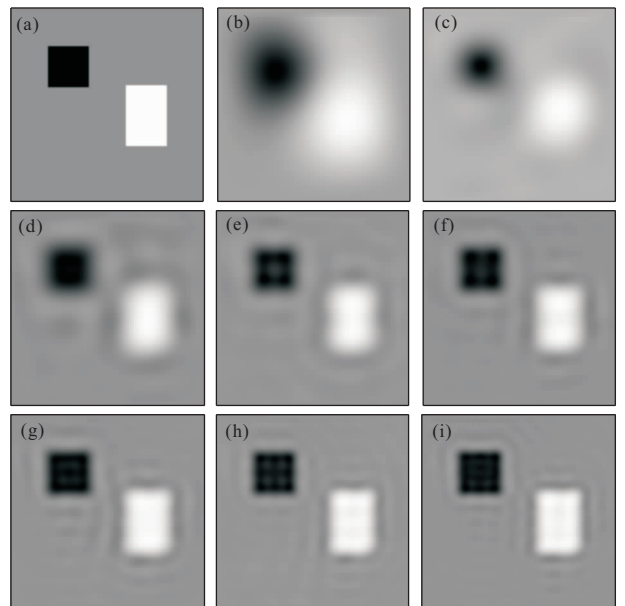


图 1 不同频率的反演结果(其中 b~i 为 2~16 Hz 的反演结果)

Fig. 1 The inverted model at different frequencies

廓越来越明显. 低频反演结果由于其波长较长只能反映该模型大尺度结构, 而高频则反映了模型的细节部分. 从低频到高频依次反演, 并把低频反演结果当作下一次反演的初始模型, 相当于对速度模型进行多尺度反演, 最终反演结果与理论模型相差很小.

2.2 复杂模型

理论模型(图 2a)网格数为 200×100 , 空间步长 $\Delta X = \Delta Z = 15 \text{ m}$. 正演参数与上面模型均一致. 一共放 40 炮, 炮间距为 75 m, 每一炮均有 200 道接收. 利用二维高斯滤波光滑理论模型作为初始模型(图 2b), 其横向和纵向相关长度分别为 1 000 m 和 500 m. 反演频率从 6 Hz 开始到 20 Hz, 反演频率间隔为 1.2 Hz.

从图 2 可以看出本文使用的预处理梯度法反演在较复杂的模型中能够得到较好的反演结果(图 2c). 模型中的高速体以及各层的轮廓都很清晰地反映出来, 与理论模型很吻合, 而且从理论模型的合成记录(图 3a)与反演结果的合成记录(图 3b)对比来看, 各个层位对应较好.

2.3 Marmous 模型

模型网格数为 400×200 (图 4a), 空间步长

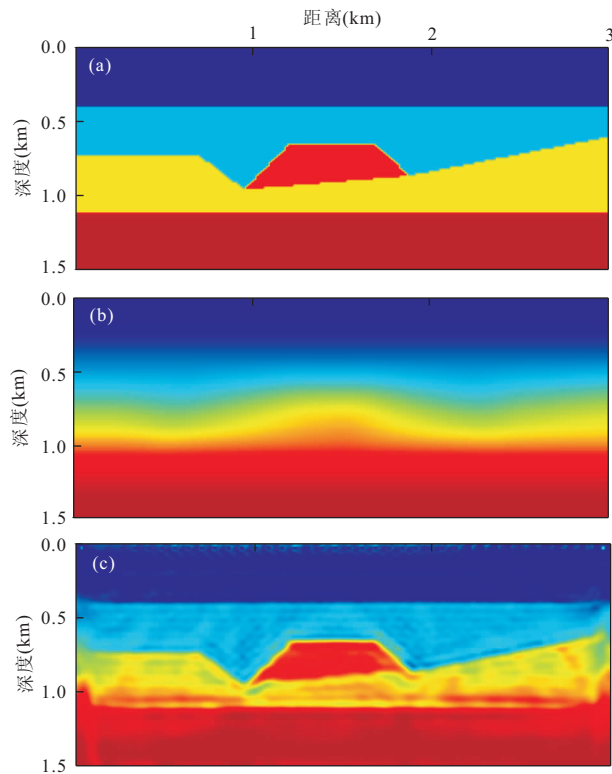


图 2 复杂模型

Fig. 2 The complex model

a. 理论模型; b. 初始模型; c. 反演速度模型

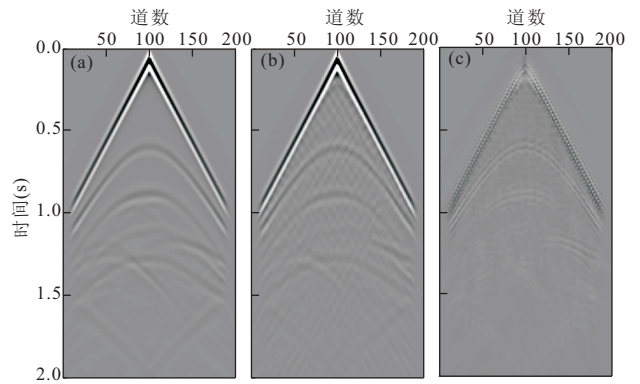


图 3 合成记录对比

Fig. 3 Comparison of the synthetic seismograms

a. 理论模型合成记录; b. 反演结果合成记录; c. 两者残差

$\Delta X = \Delta Z = 15 \text{ m}$. 正演参数与上面模型均一致. 一共放 40 炮, 炮间距为 150 m, 每一炮均有 400 道接收. 利用二维高斯滤波光滑理论模型作为初始模型(图 4b), 其横向和纵向的相关长度分别为 1 000 m 和 500 m. 反演频率从 6 Hz 开始到 20 Hz, 反演频率间隔为 1.2 Hz, 每次频率迭代 20 次. 分别采用伪 Hessian 对角元素做预条件算子和未进行预处理两种方法来进行反演.

从反演结果可以看出, 两种方法均能得到模型的大致轮廓, 但预条件梯度法反演结果(图 4d)比未进行预条件处理的反演结果(图 4c)在较深处的分辨率更好. 从最终反演结果的合成记录与理论模型的合成记录对比(图 5)来看, 主要的层位均对应较好, 深层的反射波与理论模型存在一定的差距. 从横向不同位置处的层速度曲线对比(图 6)看出, 浅层的速度反演较好, 与理论模型基本一致, 较深层处的速度存在一定的误差, 但各层分界面保持一致, 采用预条件梯度法反演的结果(反演结果 2)更接近于理论模型.

两种方法在频率 6.0 Hz 的收敛曲线可以看到, 用伪 Hessian 矩阵做预处理(图 7a), 吸收了高斯牛顿法的二次收敛优势, 目标函数在前几次迭代中收敛速度快, 误差值下降快, 随着迭代次数变化逐渐变缓. 而未进行预处理(图 7b)的收敛速度比较慢, 而且迭代过程中由于局部极值点的存在, 搜索过程在局部出现来回震荡, 每一个频率经过 20 次的迭代可能没有达到全局极小值, 故反演分辨率较低.

3 认识与结论

本文利用反射地震数据, 通过预梯度法展开频

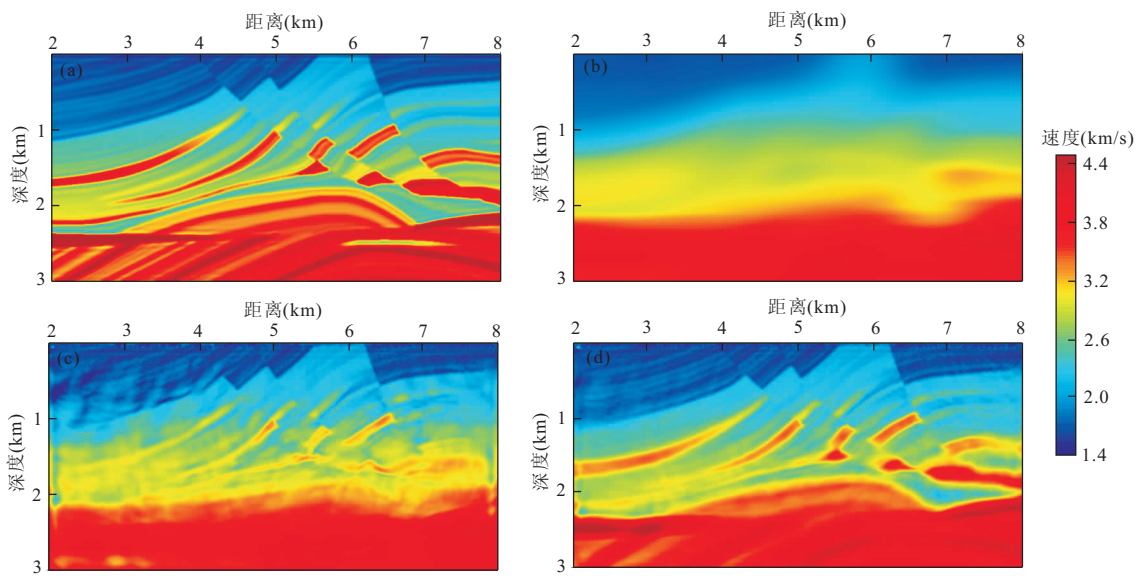


图 4 Marmous 模型及反演结果

Fig. 4 The Marmous model and the inverted velocity model
a. 理论模型; b. 初始模型; c. 未进行预处理反演结果; d. 预处理反演结果

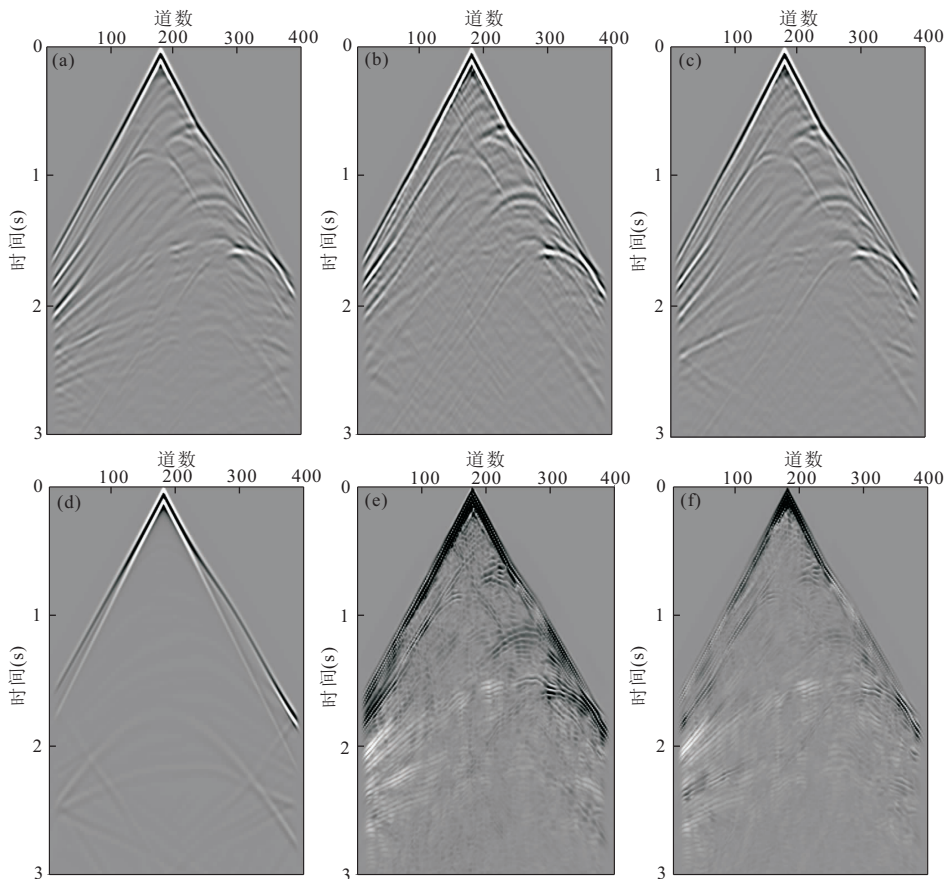


图 5 模型合成记录以及残差

Fig. 5 The synthetic seismograms and the residual

a. 理论模型合成记录; b. 未进行预处理反演结果合成记录; c. 预处理反演结果合成记录; d. 初始模型合成记; e. 记录 b 和记录 a 残差; f. 记录 c 和记录 a 残差

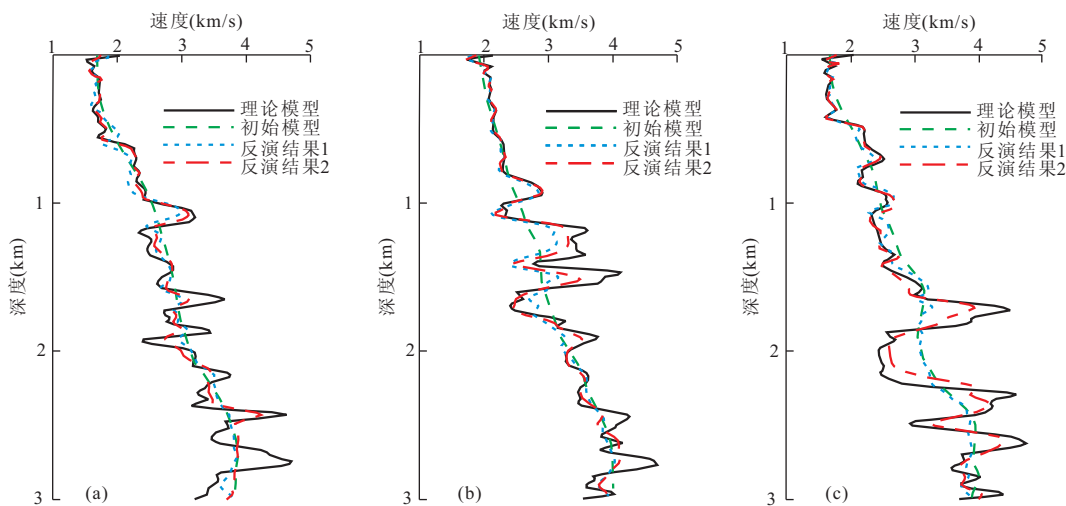


图 6 横向不同位置速度曲线

Fig. 6 The velocity curves at different horizontal positions

a. 4 000 m 处; b. 5 600 m 处; c. 6 875 m 处

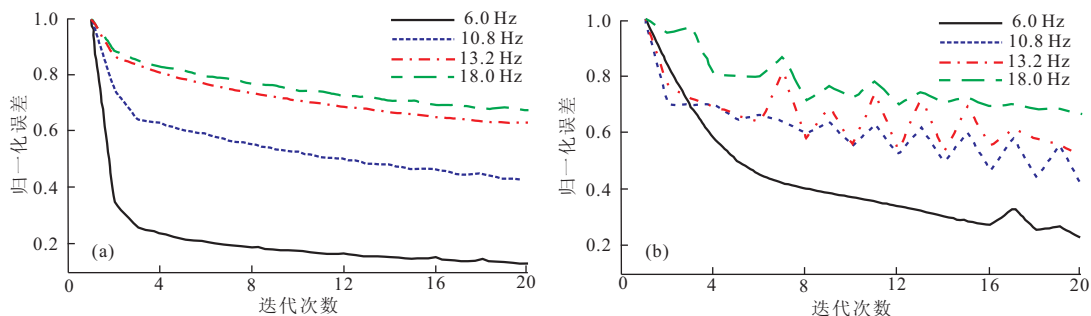


图 7 迭代误差曲线

Fig. 7 The relative error as a function of iteration number

a. 预条件梯度法迭代曲线; b. 未进行预处理迭代曲线

率域全波形反演的研究,在反演过程中采用伪 Hessian 矩阵的对角元素进行预处理,并在简单的非均匀介质模型、复杂模型以及 Marmous 模型中进行了全波形反演试算,得到了较好的反演速度结构,得出如下认识与结论:(1)低频反演结果反映大尺度速度结构,高频反演结果反映的是细节的速度结构;低频反演结果当作高频反演的初始模型,减少了解的非唯一性,能够得到较好的反演结果。(2)采用伪 Hessian 矩阵的对角元素进行预处理,减少了对 Hessian 矩阵元素的求解。结果表明利用伪 Hessian 矩阵做预处理算子,在减少计算量的前提下,能够较好地刻画模型扰动的大小,较少的迭代次数便使目标函数快速减小,加快收敛速度。(3)由于全波形反演目标函数存在大量局部极值点,需要一个较准确的初始模型,本文利用二维高斯函数将理论模型进行相关平滑处理作为初始模型,得到了较好的反演结

果。野外实际采集数据低频缺失,故可以先进行走时反演,将走时反演结果作为全波形反演的初始模型,是进一步的研究方向。

References

Ben-Hadj-Ali, H., Operto, S., Virieux, J., 2008. Velocity Model Building by 3D Frequency-Domain, Full-Waveform Inversion of Wide-Aperture Seismic Data. *Geophysics*, 73 (5): VE101 – VE117. doi: 10.1190/1.2957948

Bian, A. F., Yu, W. H., 2011. Layer-Stripping Full Waveform Inversion with Damped Seismic Reflection Data. *Journal of Earth Science*, 22 (2): 241 – 249. doi:10.1007/s12583-011-0177-6

Hicks, G. J., Pratt, R. G., 2001. Reflection Waveform Inversion Using Local Decent Methods; Estimating Attenuation and Velocity Over a Gas-Sand Deposit. *Geophysics*,

- 66(2):598—612. doi:10.1190/1.1444951
- Ha, T., Chung, W., Shin, C., 2009. Waveform Inversion Using a Back-Propagation Algorithm and a Huber Function Norm. *Geophysics*, 74(3): R15—R24. doi:10.1190/1.3112572
- Long, G. H., Li, X. F., Zhang, M. G., et al., 2009. Visco-Acoustic Transmission Waveform Inversion for Velocity Structure in Space-Frequency Domain. *Acta Seismologica Sinica*, 31(1): 32—41 (in Chinese with English abstract).
- Malinowski, M., Operto, S., 2008. Quantitative Imaging of the Permo-Mesozoic Complex and Its Basement by Frequency Domain Waveform Tomography of Wide-Aperture Seismic Data from the Polish Basin. *Geophysical Prospecting*, 56: 805—825. doi: 10.1111/j.1365—2478.2007.00680.x
- Pratt, R. G., Shin, C. S., Hicks, G. J., 1998. Gauss-Newton and Full Newton Methods in Frequency-Space Seismic Waveform Inversion. *Geophysical Journal International*, 133(2): 341—362. doi: 10.1046/j.1365—246X.1998.00498.x
- Shin, C., Yoon, K. G., Marfurt, K. J., et al., 2001. Efficient Calculation of a Partial-Derivative Wave Field Using Reciprocity for Seismic Imaging and Inversion. *Geophysics*, 66(6): 1856—1863. doi: 10.1190/1.1487129
- Shin, C., Jang, S., Min, D. J., 2001. Improved Amplitude Preservation for Prestack Depth Migration by Inversion Scattering Theory. *Geophysical Prospecting*, 49(5): 592—606. doi: 10.1046/j.1365—2478.2001.00279.x
- Soubrier, F., Haidar, A., Giraud, L., et al., 2011. Three-Dimensional Parallel Frequency-Domain Visco-Acoustic Wave Modeling Based on a Hybrid Direct/Iterative Solver. *Geophysical Prospecting*, 59(5): 834—856. doi: 10.1111/j.1365—2478.2011.00966.x
- Tarantola, A., 1984. Inversion of Seismic Reflection Data in the Acoustic Approximation. *Geophysics*, 49(8): 1259—1266. doi: 10.1190/1.1441754
- Wu, G. C., Liang, K., 2005. Quasi P-Wave Forward Modeling in Frequency-Space Domain in VTI Media. *OGP*, 40(5): 535—545 (in Chinese with English abstract).
- Wu, G. C., Liang, K., 2005. Combined Boundary Conditions of Quasi P-Wave within Frequency-Space Domain in VTI Media. *GPP*, 44(4): 301—307 (in Chinese with English abstract).
- Xu, K., Wang, M. Y., 2001. Finite Element Inversion of the Coefficients of Acoustic Equation in Frequency Domain. *Chinese Journal of Geophysics*, 44(6): 852—864 (in Chinese with English abstract).
- Xu, K., Wang, M. Y., 2004. Frequency-Domain Finite-Element Inversion of Elastic-Wave Velocity Using the Geological Regular-Blocky-Model Method. *Chinese Journal of Geophysics*, 47(4): 708—717 (in Chinese with English abstract).
- Yin, W., Yin, X. Y., Wu, G. C., et al., 2006. The Method of Finite Difference of High Precision Elastic Wave Equation in the Frequency Domain and Wave-Filed Simulation. *Chinese Journal of Geophysics*, 49(2): 561—568 (in Chinese with English abstract).
- Zhang, R. Z., Yuan, C., 2009. Application of the Seismic Waveform Inversion Technique. *Natural Gas Industry*, 29(2): 52—54 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献

- 龙桂华, 李小凡, 张美根, 等, 2009. 频率域粘弹性声波透射波形速度反演. *地震学报*, 31(1): 32—41.
- 吴国忱, 梁锴, 2005. VTI 介质频率—空间域准 P 波正演模拟. *石油地球物理勘探*, 40(5): 535—545.
- 吴国忱, 梁锴, 2005. VTI 介质准 P 波频率空间域组合边界条件研究. *石油物探*, 44(4): 301—307.
- 许琨, 王妙月, 2001. 声波方程频率域有限元参数反演. *地球物理学报*, 44(6): 852—864.
- 许琨, 王妙月, 2004. 利用地质规则块体建模方法的频率域有限元弹性波速度反演. *地球物理学报*, 47(4): 708—717.
- 殷文, 印兴耀, 吴国忱, 等, 2006. 高精度频率域弹性波方程有限差分方法及波场模拟. *地球物理学报*, 49(2): 561—568.
- 张荣忠, 袁诚, 2009. 地震波形反应技术的应用. *天然气工业*, 29(2): 52—54.