

doi:10.3799/dqkx.2016.025

频率域航空电磁三维矢量有限元正演模拟

黄 威, 殷长春*, 贲 放, 刘云鹤, 陈 辉, 蔡 晶

吉林大学地球探测科学与技术学院, 吉林长春 130026

摘要:目前有限元技术的开发及在电磁勘查技术中的应用已日趋成熟.然而,有限元正演模拟主要集中于地面和海洋电磁,航空电磁三维有限元模拟尚没有受到足够重视.以前人工作为基础,利用结构化网格实现了航空电磁系统的三维矢量有限元正演模拟.从二次场双旋度矢量非齐次亥姆霍兹方程出发,应用广义变分原理推导出变分方程,并采用六面体单元剖分,将场置于单元棱边上,对每个单元应用线性插值,最后合成含有稀疏矩阵的线性方程组.针对航空电磁多源性,利用 MUMPS (multifrontal massively parallel sparse direct solver)直接求解器进行求解,在保证精度的前提下大幅度提高计算速度.利用单个异常体模型检验算法的精度和软件的稳定性,进而通过典型地电模型的模拟验证算法的有效性.对不同地下电性结构正演模拟结果进行对比分析,进一步研究了覆盖层和垂直接触带等典型构造对航空电磁响应的影响特征.

关键词: 航空电磁法; 矢量有限元; 垂直磁偶极子; 直接求解器; 电法勘探.

中图分类号: P631.3

文章编号: 1000-2383(2016)02-0331-12

收稿日期: 2015-09-25

3D Forward Modeling for Frequency AEM by Vector Finite Element

Huang Wei, Yin Changchun*, Ben Fang, Liu Yunhe, Chen Hui, Cai Jing

College of Geo-Exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China

Abstract: The finite-element method and application in EM exploration are well-developed. However, applications of the technology are focused mostly on ground and marine EM. Little attention has been put on airborne EM. Based on the previous research, we work on three-dimensional (3D) modeling for airborne systems by vector finite-element. We apply double-curl inhomogeneous vector Helmholtz equation for the second field and obtain the variational equations by using the generalized variational principle. By dividing the model domain into hexahedral elements and putting the field on the edge, we use linear interpolation for each element and put them together to set up the linear equations. For the multiple-source problem of AEM, we use the MUMPS solver that could achieve satisfying results both on speed and accuracy. We test the stability of our algorithm on a single abnormal body model first and check the practicability of the algorithm by simulating on typical geoelectrical models. The model results show that the overburden and the vertical contacting zone have great influence on the AEM responses.

Key words: airborne EM; vector finite element; vertical magnetic dipole; fast solver; electric prospecting.

航空电磁法自 20 世纪 40 年代末 (Pemberton, 1962; Fountain, 1998) 发展至今,以其独特的优势 (具有成本低、速度快、通行性好、适用于大面积勘探、无需地面人员等优点,特别适合一些地形条件复杂地区,如高山、沙漠、湖泊、沼泽等),被广泛应用于矿产勘查 (Fraser, 1981; Yin and Hodges, 2007)、地质填图、地下水和油气资源勘查.随着各种航空电磁

系统的发展和完善,数据处理与正反演解释也不断更新.航空电磁一维正反演模拟目前已基本成熟 (黄皓平和王维中, 1990; Huang and Palacky, 1991; Macnae *et al.*, 1991; 殷长春等, 2013, 2014; 蔡晶等, 2014),但由于地下介质的复杂电性及航空电磁系统多源发射的特殊性,增大了三维正反演精度和数据解释质量的难度 (Avdeev *et al.*, 1998; Raiche,

基金项目: 国家自然科学基金项目 (Nos.41274121, 41530320); 中国科学院重大科研装备研制项目 (No.ZDYZ2012-1-03).

作者简介: 黄威 (1989-), 女, 博士研究生, 主要从事电磁法的理论研究与应用. E-mail: huangwei2012511@163.com

* **通讯作者:** 殷长春, E-mail: yinchangchun@jlu.edu.cn

引用格式: 黄威, 殷长春, 贲放, 等, 2016. 频率域航空电磁三维矢量有限元正演模拟. 地球科学, 41(2): 331-342.

1998; 刘云鹤和殷长春, 2013; Oldenburg *et al.*, 2013; Yin *et al.*, 2014; Hauser *et al.*, 2015).

航空电磁正演模拟的数值方法主要有有限差分法 (Newman and Alumbaugh, 1995; 杨怀杰等, 2015)、有限元法 (金建铭, 1998) 和积分方程法 (Hohmann, 1975; Wannamaker *et al.*, 1984). 有限差分法在物性参数复杂或场域几何特征不规则时, 适应性较差 (徐世浙, 1994), 而积分方程难于模拟复杂异常体. 相比之下, 有限元法是一种高效数值分析方法, 适用于模拟复杂电性结构, 且计算精度较前者高. 故本文利用有限元法进行航空电磁正演模拟. Coggon (1971) 从电磁场能量最小原理出发, 首次将有限元法用于大地电磁正演模拟后, 学者们对有限元法进行了深入研究. 针对节点有限元, 学者们实现了对电磁法的正演模拟 (Livelybrooks, 1993; Zyserman and Santos, 2000; 阮百尧等, 2001; 黄俊革等, 2002; Puzyrev *et al.*, 2013). 在节点有限元中采用网格节点作为自由度, 将实际坐标转换到参数坐标系下形成插值基函数. 研究表明节点有限元中虽然各单元内的插值基函数在求解区域内连续, 但与电场在界面上的法向不连续性相矛盾, 且其离散过程中只对插值函数进行约束, 没有对其导数施加任何约束, 由此得到的场会产生伪解现象. 为此, 科学家积极提出散度校正的方法, Mitsuhata and Uchida (2004) 提出了用 T - Ω 亥姆霍兹分解有限元方法, 以避免在空气层进行散度校正; 张继峰等 (2009)、Tong *et al.* (2009)、Farquharson and Miensopust (2011)、汤井田等 (2014) 和李勇等 (2015) 通过加罚项来加强散度条件, 从而消除伪解现象. 通过加罚项的方法可在一定程度上解决节点有限元法的伪解现象, 然而节点有限元不易强加边界条件, 对于处理异常体的边角处也存在困难, 结果仍不能令人满意. 矢量有限元方法出现于 20 世纪 80 年代后期, 它是将自由度置于单元棱边上, 因其矢量插值基函数能自动满足电磁场的切向连续性, 并隐含了矢量场的散度为零条件, 保证法向分量的不连续性, 故能很好地克服节点有限元法的缺陷 (Andersen and Volakis, 1998), 该方法已很好地应用于电磁三维数值模拟中.

虽然三维有限元在电磁领域已取得了重大进步, 但利用矢量有限元法进行航空电磁三维模拟的研究相对较少. 本文利用三维矢量有限元进行航空电磁法正演模拟, 并将 MUMPS (multifrontal massively parallel sparse direct solver) 直接求解器应用

于有限元方程组求解中, 以解决航空电磁法的多源问题. 文中首先从双旋度矢量非齐次亥姆霍兹方程出发, 对控制方程进行变分处理; 通过将整个求解区域用六面体进行离散剖分和单元分析, 进而合成矩阵并利用求解器求解. 得出电场值后, 通过对形函数求导, 得到接收点处磁场响应. 针对 Newman and Alumbaugh (1995) 给出的经典正演模型并和其文章内的积分方程计算结果进行对比, 验证本文算法的有效性. 最后, 本文研究了当地下存在异常体时, 覆盖层和垂直接触带及各种复杂异常体对航空电磁响应的影响特征.

1 正演模拟算法

频率域航空电磁正演模拟 (王卫平等, 2015) 是基于如下麦克斯韦方程组 (时谐因子为 $e^{i\omega t}$):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_p, \quad (2)$$

其中, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 分别表示电、磁场; σ 为介质导电率; \mathbf{J}_p 为源电流密度; $i = \sqrt{-1}$; μ_0 为自由空间磁导率, 即 $\mu_0(\mathbf{r}) = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. 在空气中利用上两式求解电磁场时, 由于空气中电导率接近于零, 公式 (2) 右端第一项 $\sigma \mathbf{E}$ 相对很小, 公式 (1) 和 (2) 形成弱耦合, 导致方程解不收敛或求解速度异常缓慢. 因此, 笔者将上两式左右两端分别取旋度, 转换为二阶的非齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \nabla \times \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \sigma (\nabla \times \mathbf{H}) \times \left(\frac{1}{\sigma} \right) + i\omega \mu_0 \sigma \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_p. \quad (4)$$

对于求解航空电磁法的磁场问题, 虽然直接利用方程 (4) 较之于求解公式 (3) 速度较快, 但由于在方程 (4) 右端的 \mathbf{J}_p 旋度项及式中第 2 项 (Nabighian, 1992) 会导致求解困难, 故本文中采用公式 (3) 进行求解.

在利用矢量有限元进行航空电磁三维正演模拟时, 为了避免场源的奇异性, 采用将总场分解成一次场和二次场的算法, 其中一次场可假设为全空间或者半空间的解析解. 采用垂直磁偶极子作为发射源, 得到如下二次场的非齐次亥姆霍兹方程 (杨波等, 2012).

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + i\omega \mu_0 \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = -i\omega \mu_0 \sigma_a(\mathbf{r}) \mathbf{E}_p(\mathbf{r}), \quad (5)$$

其中, $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ 是待求的电场值; $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$ 是背景场; 异常

电导率 $\sigma_a(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) - \sigma_0(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r})$ 是电导率, $\sigma_0(\mathbf{r})$ 是背景场电导率. 令 $\kappa^2 = i\omega\mu_0\sigma(\mathbf{r})$, $\kappa_s^2 = -i\omega\mu_0\sigma_a(\mathbf{r})$ 则可得到计算二次场时有限元所满足的控制方程:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + \kappa^2 \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \kappa_s^2 \mathbf{E}_p(\mathbf{r}). \quad (6)$$

为使泛函的变分原理在有损介质电磁问题中得以应用, 利用广义变分原理, 公式(6)可表示为:

$$F[E_s(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \langle \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \rangle + \frac{1}{2} \langle \kappa^2 \mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \kappa_s^2 \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) \rangle, \quad (7)$$

对公式(7)取变分, 应用第一矢量格林定理, 并对变分方程强加驻点条件, 取 Dirichlet 边界条件, 得到变分方程(范翠松, 2013):

$$\begin{cases} \delta F[E_s] = \iiint_v (\nabla \times \mathbf{E}_s) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{E}_s) dV + \iiint_v \kappa^2 \mathbf{E}_s \cdot \delta \mathbf{E}_s dV - \iiint_v \kappa_s^2 \mathbf{E}_p \cdot \delta \mathbf{E}_s dV = 0 & \in \Omega \\ \mathbf{E}_s = 0 & \in \Gamma. \end{cases} \quad (8)$$

有限元方法中求解区域剖分单元基本分为两种类型: 非结构网格(三角剖分和四面体剖分)(Key and Weiss, 2006; Tang *et al.*, 2010; 殷长春等, 2015)和规则网格(矩形剖分和六面体剖分). 非结构网格的剖分单元较为灵活, 能更好地模拟起伏地形和地下复杂电性结构. 然而, 非结构网格剖分具有任意性, 保证高计算精度的前提是高质量的网格设计, 但这会增加实际应用难度. 相比之下, 规则网格结构简单, 算法易于实现. 本文对求解区域采用规则六面体单元进行剖分. 如图 1 所示, 全区域采用六面体进行剖分, 发射和接收装置及异常体均位于剖分较细的目标区范围, 为减小边界效应影响, 需进行形扩边处理. 图 1b 给出单元剖分的情况, 赋予单元的每条边一个切向场分量, 单元中心点坐标为 (x_0, y_0, z_0) , l_x^e 、 l_y^e 、 l_z^e 分别是单元 x 、 y 、 z 方向上的边长, 将单元平面及内部的电场分量用插值函数表示为:

$$\begin{aligned} E_x^e &= \sum_{i=1}^4 N_{xi}^e E_{xi}^e, E_y^e = \sum_{i=1}^4 N_{yi}^e E_{yi}^e, \\ E_z^e &= \sum_{i=1}^4 N_{zi}^e E_{zi}^e, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, E_{xi}^e 、 E_{yi}^e 、 E_{zi}^e 、 N_{xi}^e 、 N_{yi}^e 、 N_{zi}^e 分别为 x 、 y 、 z 方向的切向电场和插值基函数. 对于插值函数采用矢量基函数, 该方法能自动满足电场和磁场在介质分界面上的切向连续性, 并具有零散度和非零

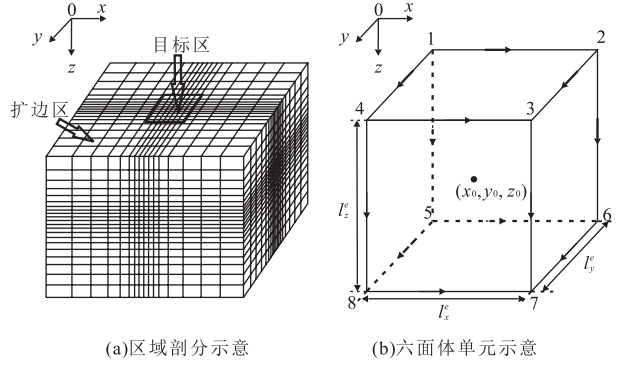


图 1 区域剖分和六面体单元示意
Fig.1 Sketch of regional subdivision and hexahedron element

旋度的特征, 可有效消除节点有限元中的伪解现象. 区别于节点有限元中的标量基函数, 矢量有限元的矢量函数未强加电磁场法向分量的连续性, 由其形成的矩阵也更加稀疏. 矢量插值基函数的表达式为:

$$\mathbf{N}_{i=[1,4]}^e = \frac{1}{4} (1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \hat{x}, \quad (10)$$

$$\mathbf{N}_{i=[5,8]}^e = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i) \hat{y}, \quad (11)$$

$$\mathbf{N}_{i=[9,12]}^e = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \hat{z}, \quad (12)$$

其中, \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} 为单位向量; 坐标转换 $\xi = 2(x - x_0)/l_x^e$, $\eta = 2(y - y_0)/l_y^e$, $\zeta = 2(z - z_0)/l_z^e$, (ξ_i, η_i, ζ_i) 与棱边编号有关(顾观文等, 2014). 根据公式(8)及(10)~(12), 可得:

$$\delta E_s^T K_{1e} E_s^e + k^2 \delta E_s^T K_{2e} E_s^e = \kappa_s^2 \delta E_s^T B_e, \quad (13)$$

其中,

$$K_{1e} = \iiint_v \begin{bmatrix} \frac{\partial N_x}{\partial y} \frac{\partial N_x^T}{\partial y} + \frac{\partial N_x}{\partial z} \frac{\partial N_x^T}{\partial z} & -\frac{\partial N_x}{\partial y} \frac{\partial N_y^T}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_y}{\partial x} \frac{\partial N_x^T}{\partial y} & \frac{\partial N_y}{\partial x} \frac{\partial N_y^T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial z} \frac{\partial N_y^T}{\partial z} \\ -\frac{\partial N_z}{\partial x} \frac{\partial N_x^T}{\partial z} & -\frac{\partial N_z}{\partial y} \frac{\partial N_y^T}{\partial z} \\ -\frac{\partial N_x}{\partial z} \frac{\partial N_z^T}{\partial x} & \\ -\frac{\partial N_y}{\partial z} \frac{\partial N_z^T}{\partial y} & \\ \frac{\partial N_z}{\partial x} \frac{\partial N_z^T}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial y} \frac{\partial N_z^T}{\partial y} & \end{bmatrix} dV,$$

$$K_{2e} = \iiint_v \begin{bmatrix} N_x N_x^T \\ N_y N_y^T \\ N_x N_x^T \end{bmatrix} dV,$$

$$B_e^T = \left[\left(\iiint_v N_x N_x^T dV \cdot \mathbf{E}_{px} \right)^T, \right.$$

$$\left(\iiint_v N_y N_y^T dV \cdot E_{py} \right)^T, \\ \left(\iiint_v N_z N_z^T dV \cdot E_{pz} \right)^T \right].$$

根据每个单元和整体区域的关系,将矩阵合成为总体矩阵并采用压缩方式存储,最后得到一个含有带状对称复数阵的方程组:

$$KE_s = b. \quad (14)$$

航空电磁为多源问题,由于其源项仅位于方程组的右端,可以通过替换右端项实现多源电磁法的快速正演.本文用 MUMPS 直接求解器 (Fèvre *et al.*, 2006; Agullo, 2008; Amestoy *et al.*, 2012) 求解方程组.该求解器由 CERFACS 研究团队开发 (Amestoy *et al.*, 2001),可实现快速并行计算,现已广泛应用于三维电磁正反演中 (Haber *et al.*, 2004; Rachowicz and Zdunek, 2011; Oldenburg *et al.*, 2013; Schwarzbach and Haber, 2013; Jahandari and Farquharson, 2014).该求解器求解过程分为矩阵分解和方程组求解两个阶段.矩阵分解应用多波前技术 (multi-frontal): 利用稀疏矩阵的特性,得到一系列密集子阵 (波前),再将 LU 分解转化为对这些波前的装配、消去、更新等操作;分解后的矩阵存于内存或硬盘上,以便随时调用.本文在 Windows 系统下应用复数双精度调用求解器进行计算,矩阵采用全带宽.由于直接求解器占用内存较大,本文算例在双 8 核 CPU、128GB 内存工作站上进行计算.当网格剖分确定时,分解阶段耗时固定,求解不同源问题时只需替换右端项,故利用 MUMPS 求解器来解方程组能有效解决航空电磁的多源问题.

航空电磁观测的是磁场分量,笔者利用电磁场的旋度关系公式 (15) 计算磁场.在以往处理中,学者们多采用数值算法公式 (16) (胡英才, 2015) 的理论进行转换, l 是水平方向相邻两个计算点的距离, U_{m1-4} 是计算点沿垂直方向的 4 个电场值, U_{n1} 和 U_{n3} 分别是水平方向与所求计算点等距的电场值, m, n 分别代表 x, y, z 方向.

$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \\ H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial n} \Big|_{n=0} &= \frac{1}{6l} (-11U_{m1} + 18U_{m2} - 9U_{m3} + 2U_{m4}), \\ \frac{\partial E_n}{\partial m} \Big|_{n=0} &= \frac{1}{2l} (U_{n3} - U_{n1}), \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

公式 (16) 采用对多个网格的计算点进行插值的方法,由于程序本身及编译器难以避免的误差,导致插值后误差较大.因此,本文对单个网格的矢量基函数进行求导后插值以减小误差,从而得到任一点处磁场的水平和垂直分量:

$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \left[\sum_{i=(9\cdots 12)} \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i^c E_{zi}^c \right) - \sum_{i=(5\cdots 8)} \left(\frac{\partial}{\partial z} N_i^c E_{yi}^c \right) \right], \quad (17)$$

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \left[\sum_{i=(5\cdots 8)} \left(\frac{\partial}{\partial x} N_i^c E_{yi}^c \right) - \sum_{i=(1\cdots 4)} \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i^c E_{xi}^c \right) \right]. \quad (18)$$

2 数值算例

2.1 精度验证

为了验证算法的准确性,笔者利用 Newman and Alumbaugh (1995) 模型,将本文结果与其文中利用积分方程 (IE) 方法得到的数值结果进行对比.图 2 给出单个异常体模型,异常体位于坐标原点正下方, a, b, c (20 m、200 m、75 m) 分别为异常体在 x, y, z 方向的长度.异常体顶部埋深为 50 m,异常体电阻率 $\rho_1 = 1 \Omega \cdot m$,均匀半空间电阻率 $\rho_0 = 100 \Omega \cdot m$,频率 $f = 900 \text{ Hz}$,收发偶极的高度 $h = 20 \text{ m}$,收发距 $r = 10 \text{ m}$,模型目标区网格尺寸为 $2.5 \text{ m} \times 2.5 \text{ m} \times 5.0 \text{ m}$,全区域网格数为 $60 \times 60 \times 42$ 个,方程组的未知数为 471 042 个,求解器分解阶段耗时约 2.36 min,求解阶段单源耗时 0.578 s,共取 38 个源进行计算.图 3 为本文计算结果与 Newman and Alumbaugh (1995) 的积分方程结果的对比图.

图 3a 和 3c 为三维矢量有限元正演模拟结果与

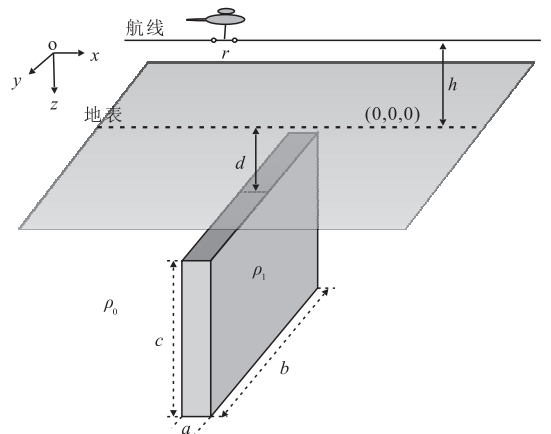


图 2 三维矢量有限元单个异常体模型

Fig.2 A single abnormal body model for 3D vector FE
据 Newman and Alumbaugh (1995)

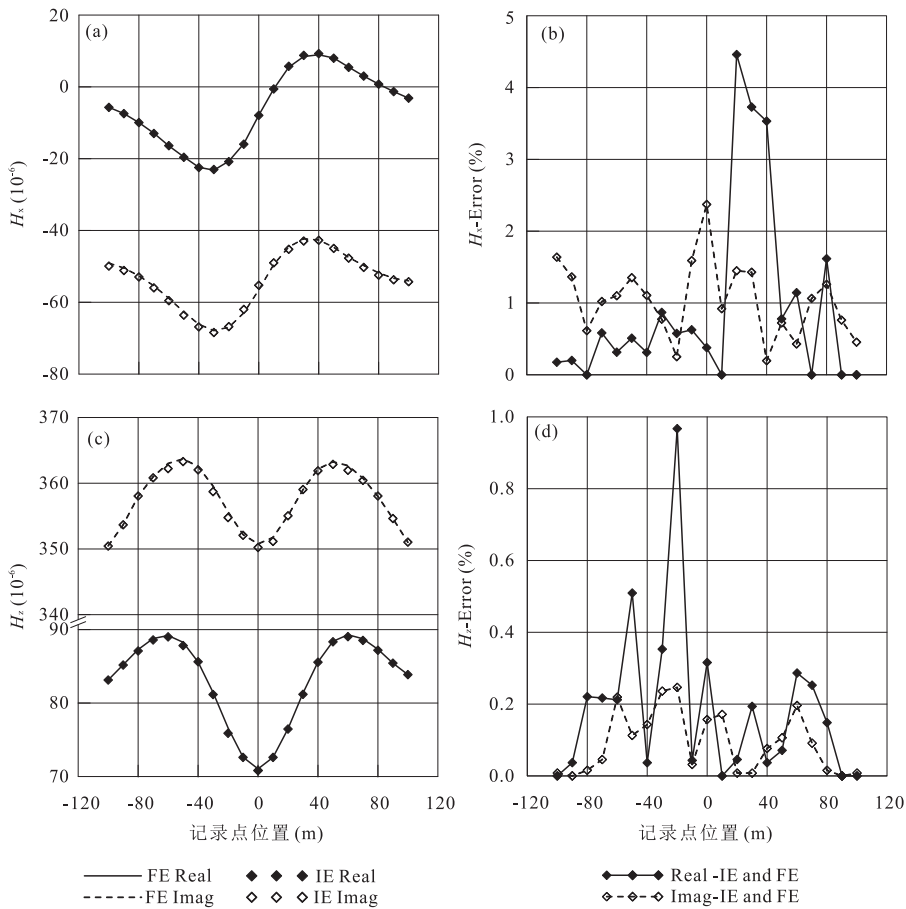


图 3 本文结果与 Newman and Alumbaugh (1995) 的 IE 模拟结果对比

Fig.3 Comparison of FE results from this paper with those from Newman and Alumbaugh (1995)
a,b.单个异常体模型的响应;c,d.各自响应的相对误差

Newman and Alumbaugh(1995)的积分方程(IE)的结果对比.由图可以看出,磁场水平分量 H_x 和垂直分量 H_z 的响应吻合很好;图 3b 和 3d 为矢量有限元与 IE 的相对误差,其中 H_x 最大误差为 4.46%, H_z 最大误差为 0.96%,说明本文算法具有较高精度.

2.2 单个异常体模型

在验证算法精度后,笔者首先研究了不同埋深和不同频率时,地下存在的单个异常体对航空电磁响应的影响特征.模型如图 2 所示,异常体大小为 $20\text{ m} \times 100\text{ m} \times 20\text{ m}$,顶部埋深分别为 $d = 20\text{ m}$ 、 30 m 和 50 m ,电阻率 $\rho_1 = 1\ \Omega \cdot \text{m}$,均匀半空间电阻率 $\rho_0 = 100\ \Omega \cdot \text{m}$,频率 $f = 900\text{ Hz}$ 、 $5\ 000\text{ Hz}$ 和 $23\ 000\text{ Hz}$,收发偶极高度 $h = 30\text{ m}$,收发距 $r = 10\text{ m}$.目标区网格尺寸为 $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 5\text{ m}$,网格数及方程组未知数与图 3 中的算例相同.

图 4 为三维矢量有限元不同频率、不同埋深的航空电磁响应模拟结果,其中图 4a 和 4d 分别是频率 $f = 900\text{ Hz}$ 时不同埋深的 H_x 、 H_z 的响应;图 4b 和 4e

分别是频率 $f = 5\ 000\text{ Hz}$ 时不同埋深的 H_x 、 H_z 响应;而图 4c 和 4f 分别是频率 $f = 23\ 000\text{ Hz}$ 时不同埋深的 H_x 、 H_z 响应.由图可以看出:(1)随着埋深增大,异常体响应逐渐减小,随着频率增大,异常体响应逐渐增大;(2)因本文采用的是非对称航空电磁系统,故 H_z 分量是非完全对称的,而 H_x 分量呈现不对称性;(3)异常体与围岩交界处的电阻率差异导致磁场水平和垂直分量的响应在异常体附近变化明显且出现峰值,远离异常体的部分趋于平稳;(4)因采用垂直磁偶极子发射,故所有频率的 H_z 响应比 H_x 响应大, H_z 响应关于异常体中心在地面的投影点左右趋于对称,据此可判断异常体中心的水平位置;(5)当频率 $f = 23\ 000\text{ Hz}$,且异常体埋深较深(50 m)时,电磁响应变化幅度很小,表明高频电磁场没有穿透顶部覆盖层,因而没有探测到深部异常体的存在.

2.3 覆盖层异常体模型

在航空电磁正演模拟中,异常体之间由于电磁耦合会互相影响,而当地下存在多个异常体且含有覆盖

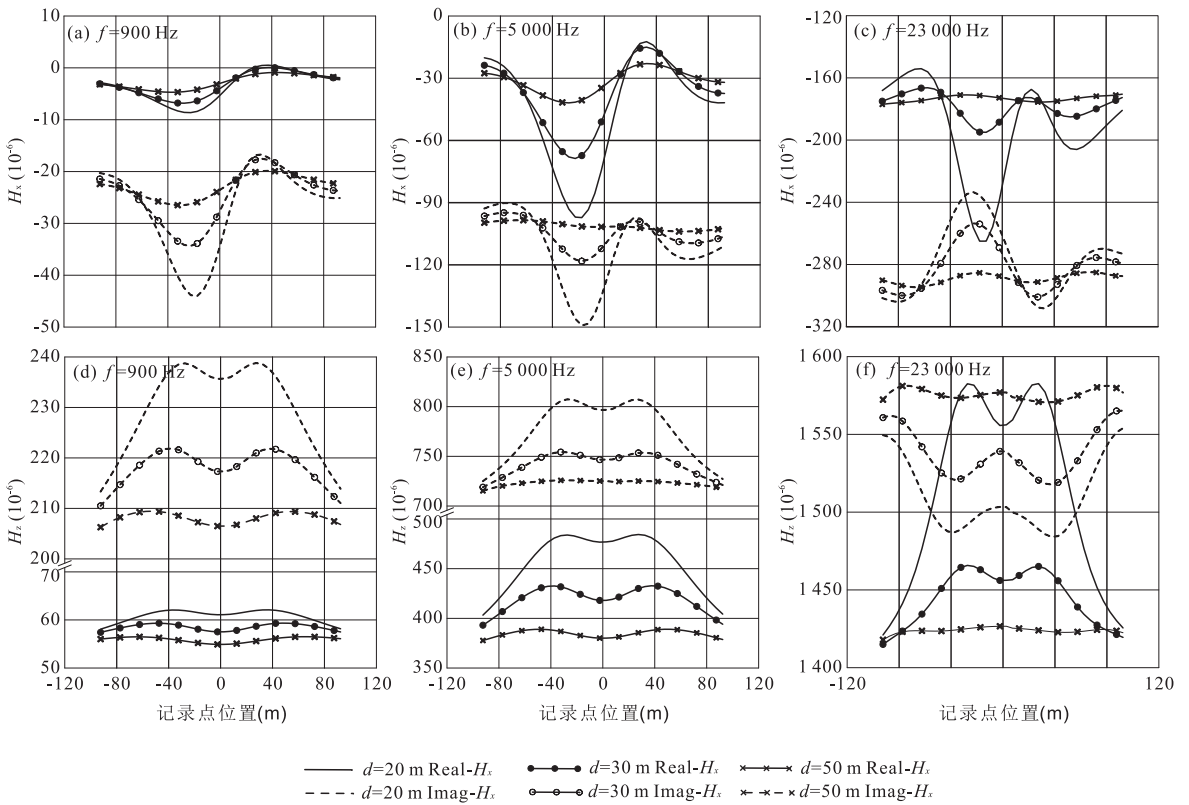


图 4 不同频率(900 Hz, 5 000 Hz 和 23 000 Hz)和不同埋深(20 m,30 m 和 50 m)的单个异常体航空电磁响应
 Fig.4 AEM responses for a single abnormal body in the earth for different frequencies (900 Hz, 5 000 Hz and 23 000 Hz) and different buried depths (20 m, 30 m and 50 m)

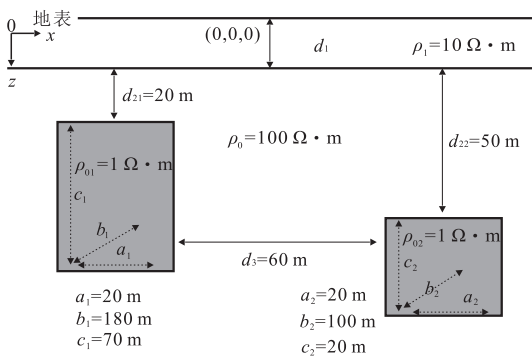


图 5 覆盖层异常体模型
 Fig.5 3D model with overburden

层时,电磁响应会发生明显变化.因此笔者设计如图 5 所示的模型,以研究覆盖层下存在多个异常体时航空电磁响应特征.其中,收发偶极高度 $h = 30$ m,收发距 $r = 10$ m,频率 $f = 900$ Hz,目标区网格尺寸为 $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$,网格数及方程组未知数与图 3 中的算例相同.利用此模型分别计算没有覆盖层($d_1 = 0$ m)和有覆盖层($d_1 = 20$ m)时左侧异常体、右侧异常体及左右异常体同时存在时的电磁响应.

常体、左右异常体响应的影响.图 6a 和 6d 分别是左侧异常体的 H_x 和 H_z 响应;图 6b 和 6e 分别是右侧异常体的 H_x 和 H_z 响应,而图 6c 和 6f 分别是左右两个异常体同时存在时的 H_x 和 H_z 响应.从图中可以得出:(1)带覆盖层的响应曲线与仅有异常体时的曲线变化趋势相似.然而,由于良导覆盖层的存在,响应增强,且局部异常较平滑;(2)两个异常体同时存在的响应比单个异常体的响应大,说明异常体之间存在相互耦合.因此在航空电磁数据解释时,异常体间的耦合及覆盖层的影响不可忽略.

2.4 垂直接触带模型

为研究垂直接触带对航空电磁数据的影响,笔者设计如图 7 所示的模型.垂直接触带左侧 $\rho_{01} = 100 \Omega \cdot \text{m}$,右侧 $\rho_{02} = 500 \Omega \cdot \text{m}$,频率 $f = 1000$ Hz,收发偶极高度 $h = 30$ m,收发距 $r = 10$ m,异常体 $\rho_1 = 1 \Omega \cdot \text{m}$ 、 $10 \Omega \cdot \text{m}$ 、 $50 \Omega \cdot \text{m}$,位于右侧接触带.异常体左侧面位于接触带交界处,异常体大小为 $20 \text{ m} \times 180 \text{ m} \times 75 \text{ m}$,异常体顶部埋深 $d = 20$ m.模型目标区网格尺寸为 $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$,网格数及方程组未知数与图 3 中的算例相同.为更好地比较响应特征,将垂直接触带中含有异常体和不含

图 6 展示了覆盖层分别对左侧异常体、右侧异

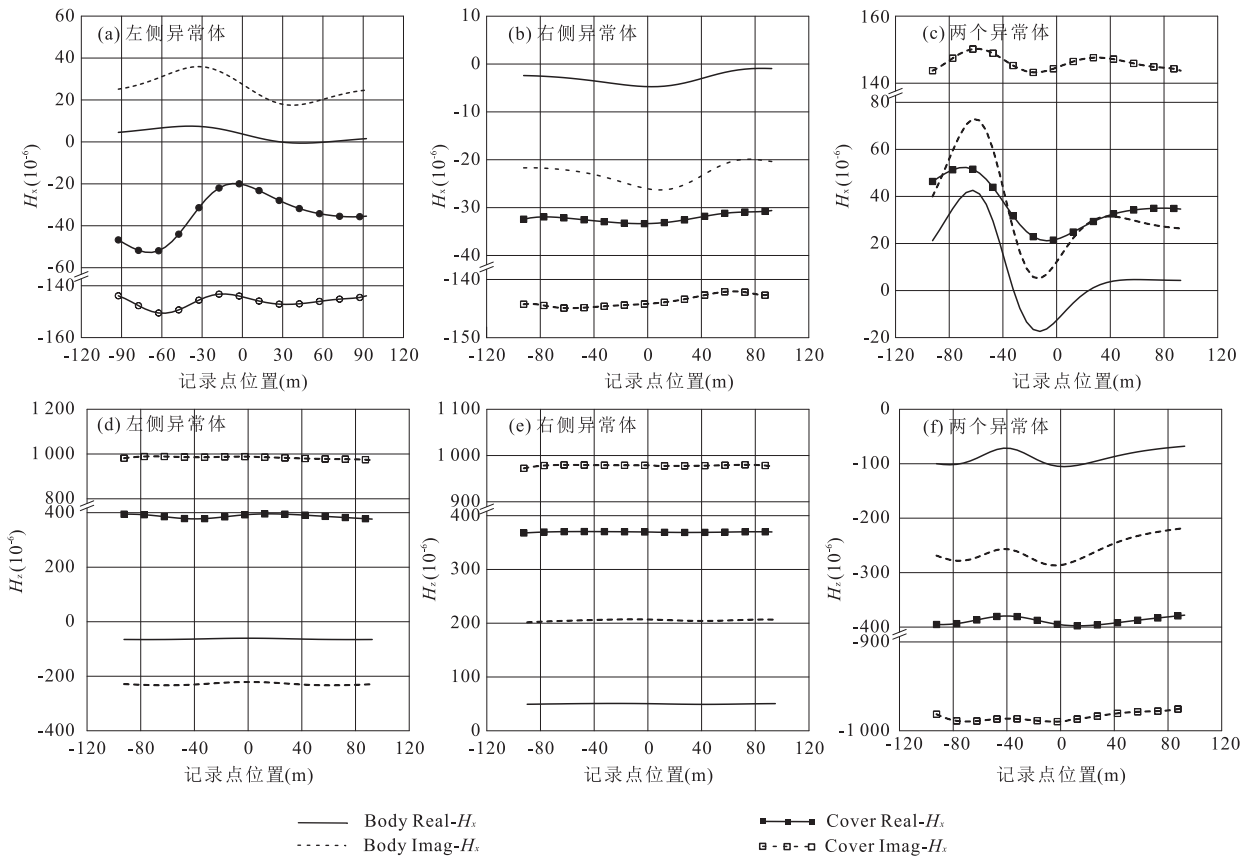


图 6 覆盖层下多个异常体的航空电磁响应

Fig.6 AEM responses for multiple abnormal bodies under the overburden

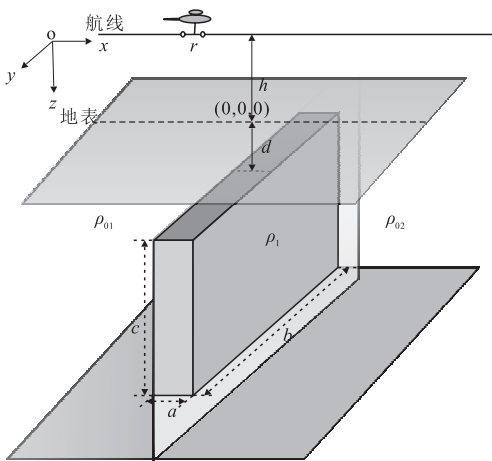


图 7 垂直接触带模型

Fig.7 A model with a vertical contact zone

异常体的电磁响应与均匀半空间中含有异常体的电磁响应进行比较,结果如图 8 所示。

图 8 展示了垂直接触带无异常体(fault)、垂直接触带内有异常体(fault & body)及均匀半空间中存在异常体(half space & body)的模型响应对比.其中图 8a 和 8d 是异常体 $\rho_1=1 \Omega \cdot \text{m}$ 时 3 种模型的 H_x 和

H_z 响应;图 8b 和 8e 是异常体 $\rho_1=10 \Omega \cdot \text{m}$ 时 3 种模型的 H_x 和 H_z 响应;而图 8c 和 8f 是异常体 $\rho_1=50 \Omega \cdot \text{m}$ 时 3 种模型的 H_x 和 H_z 响应.由图可以看出:(1)当地下为均匀半空间时,响应为一条直线,而对于地下仅存在垂直接触带的情况,因界面左右电阻率的变化,导致接触带交界处水平和垂直磁场响应发生变化,而在远离交界面的左右部分逼近直线,特别是对于本文设定的电阻率分布,虚分量响应由左向右呈现下降趋势;随着分界面两侧电导率差异增大,响应变化幅度变大.(2)比较垂直接触带内有异常体和均匀半空间中存在异常体的响应,笔者发现无论对于 H_x 还是对于 H_z 分量,在均匀半空间条件下,异常响应趋于对称;然而当异常体存在于有接触带的半空间时,异常响应的对称性遭到破坏.对于文中的模型,右端异常幅值下降,这是由于叠加了接触带异常的缘故.(3)当异常体的电阻率为 $50 \Omega \cdot \text{m}$ 时,垂直接触带内有异常体的响应逼近垂直接触带无异常体模型的响应值,从航空电磁响应中难以识别异常体的存在。

2.5 倾斜板状体模型

针对有限元法能模拟复杂异常体的优点,本文

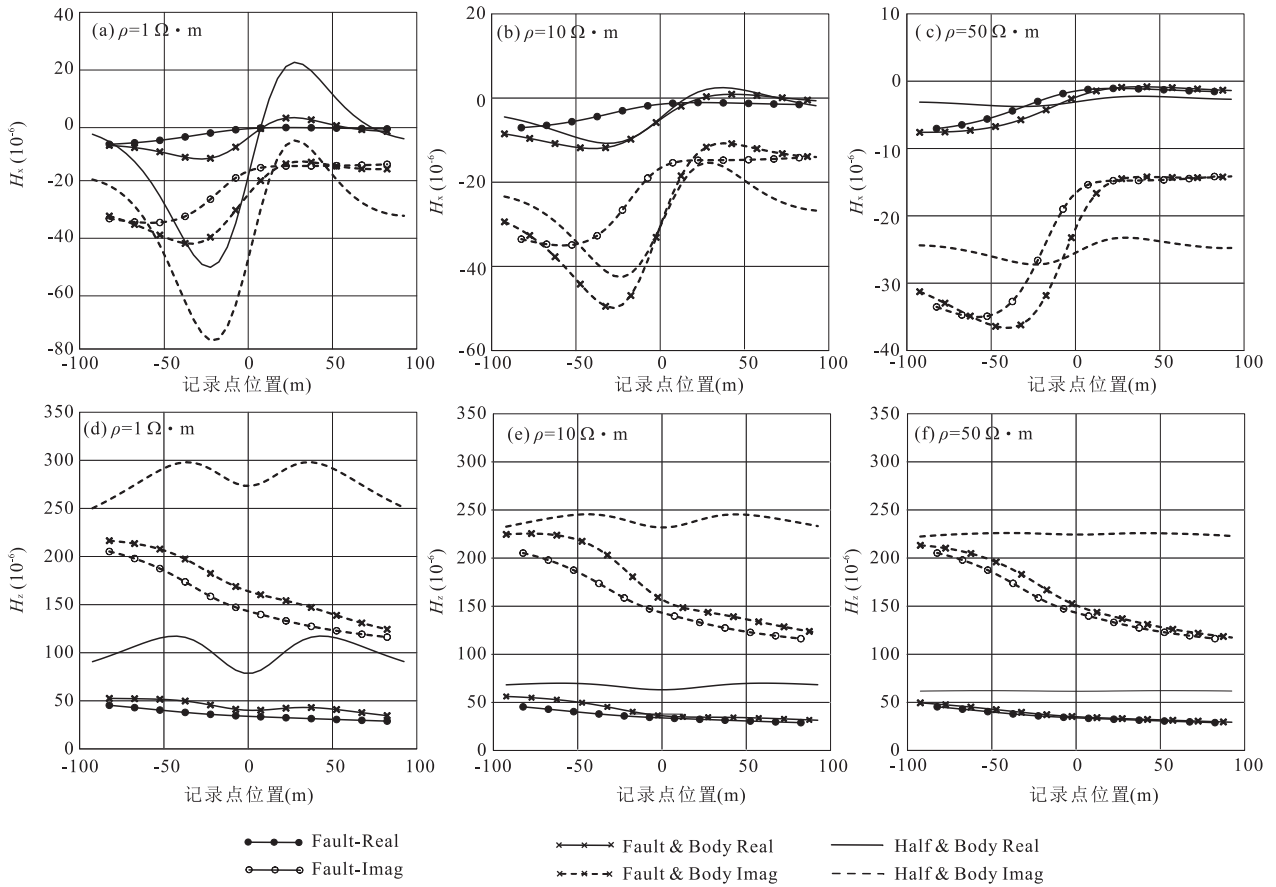


图 8 3 种不同模型的电磁响应

Fig.8 AEM responses for three different models

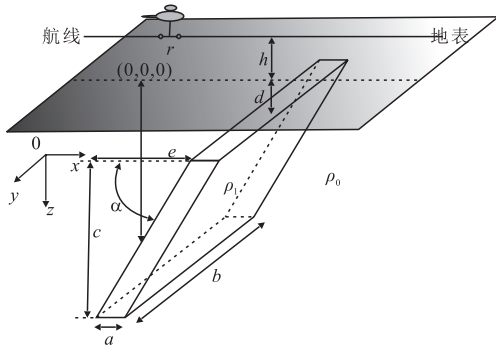


图 9 倾斜板状体模型

Fig.9 An inclined plate model

给出如图 9 所示的倾斜板状体模型.收发偶极高度 $h=30\text{ m}$,收发距 $r=10\text{ m}$,频率 $f=900\text{ Hz}$,电阻率 $\rho_1=1\text{ }\Omega\cdot\text{m}$,均匀半空间电阻率 $\rho_0=100\text{ }\Omega\cdot\text{m}$,异常体顶部埋深 $d=20\text{ m}$,异常体大小为 $a=20\text{ m}$, $b=60\text{ m}$, $c=50\text{ m}$,异常体横向偏移距离 $e=20\text{ m}$,倾角 $\alpha=45^\circ$,异常体的中心位置在地面投影点为原点,倾斜板状体模型的目标区网格尺寸为 $2.5\text{ m}\times 2.5\text{ m}$,全区域网格数为 $70\times 62\times 61$ 个,待求解方程未知数为 819 197 个,求解器分解阶段耗

时 8.36 min,求解阶段单源耗时 1.12 s,共取 40 个源.倾斜板状体采用阶梯状网格近似,由于应用小尺寸网格进行递变,故精度较高,曲线较圆滑.模拟结果如图 10 所示.

图 10 为倾斜板状体正演模拟响应.因异常体和背景场的电阻率变化,电磁响应变化与单个异常体有着相同的规律,即在异常体附近响应出现峰值,远离异常体时响应值趋于一个稳定值;不同的是,对于 H_x 响应,由于异常体右侧埋深较浅,响应值较左侧大; H_z 响应不再趋于对称,板状体顶部异常响应值较大.

2.6 V 型板状体模型

笔者设计如图 11 所示的 V 型板状体模型:收发偶极高度 $h=30\text{ m}$,收发距 $r=10\text{ m}$,频率 $f=900\text{ Hz}$,电阻率 $\rho_1=1\text{ }\Omega\cdot\text{m}$,均匀半空间电阻率 $\rho_0=100\text{ }\Omega\cdot\text{m}$,异常体顶部埋深 $d=20\text{ m}$,异常体大小 $a=20\text{ m}$, $b=60\text{ m}$, $c=25\text{ m}$,V 型板状体上部间的距离 $e=50\text{ m}$,倾角 $\alpha=45^\circ$,异常体的中心位置在地面投影点为坐标原点,V 型板状体也采用阶梯状网格近似.V 型板状体模型的目标区网格尺寸为 $2.5\text{ m}\times 2.5\text{ m}\times 2.5\text{ m}$,全区域网格数为 $80\times 62\times 59$

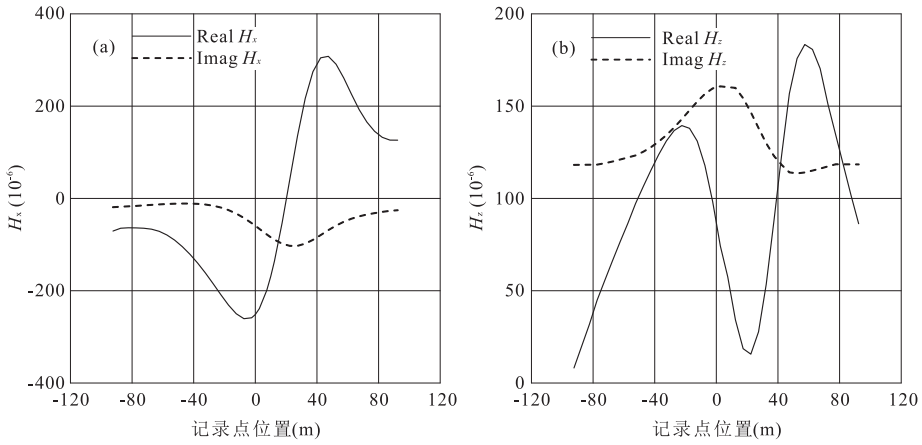


图 10 倾斜板状体模型响应

Fig.10 AEM responses for an inclined plate model

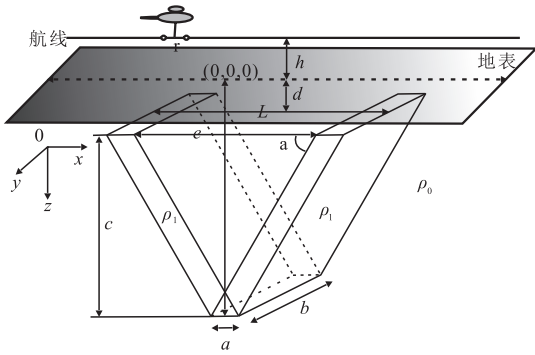


图 11 V 型板状体模型

Fig.11 V-shaped plate model

出现峰值,远离板状体部分趋于平稳.对于 H_x 的实部,因 V 型板状体中间为背景区域故其响应趋于稳定值,在 V 型两端各出现极值,而 H_x 虚部同单个异常体的趋势大体相同;对于 H_z 的实部分别出现了三峰两谷,第 1 个和第 3 个峰值是 V 型板状体两端的反应,而中间的峰和谷都是 V 型板状体中间部分的响应;由于 V 型板状体底部埋深较深,异常响应明显比两端小; H_z 虚部为左右趋于对称的曲线,在原点处出现了峰值,反映出异常体中心在地面投影点的位置.

个,方程未知数为 904 797 个,求解器分解阶段耗时 13.72 min,求解阶段单源耗时 2.52 s,共取 47 个源.模拟结果如图 12 所示.

图 12 中给出了 V 型板状体模型的水平 and 垂直磁场响应.由图可见磁场响应在原点左右两侧分别

3 结论

考虑到一阶麦克斯韦方程组在空气中的弱耦合性,本文采用存在空气层时能进行高效模拟的双旋度矢量非齐次亥姆霍兹电场方程,将变分方程转变

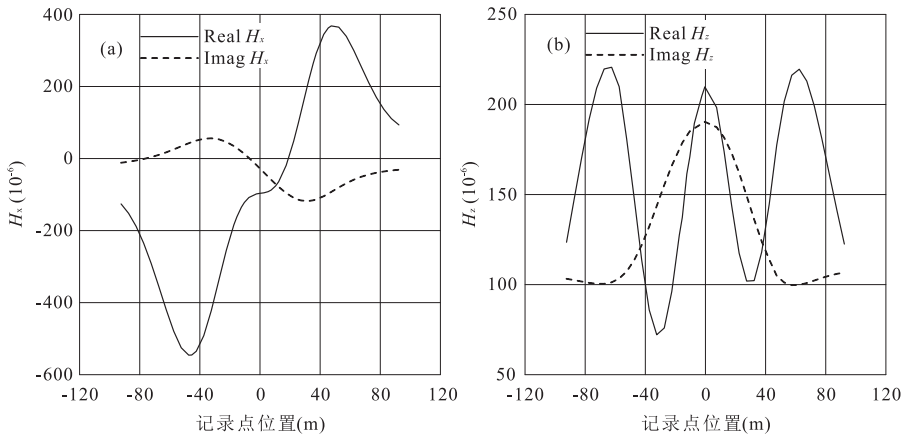


图 12 V 型板状体模型响应

Fig.12 Response of a V-shaped plate model

为线性代数方程.考虑节点有限元的局限性,选取矢量基函数进行插值,成功消除节点有限元中的伪解现象.对于多源问题通过引入求解器,并尝试在 Windows 环境下实施并行计算,在保证精度的前提下大幅度地提高求解速度,这对解决航空电磁法的多源问题至关重要.在求解磁场的方法上,通过对形函数求导,获得任意点处的磁场值.无论是经典模型还是常规航空电磁模型的响应模拟均验证本文算法的有效性.通过对均匀半空间中不同埋深的单个异常体及存在覆盖层、垂直接触带、复杂多异常体模型等对航空电磁响应的影响特征分析,发现航空电磁系统响应对地下异常体反应明显.然而由于航空电磁异常的复杂性,对各种不同异常体的响应特征进行细致的分析研究非常重要.期望文中算法的实现为航空电磁三维反演打下理论基础.

致谢:感谢开源软件 MUMPS 的作者,感谢殷长春“千人计划”科研团队其他成员对本文算法给予的指导和帮助.

References

- Andersen, L. S., Volakis, J. L., 1998. Hierarchical Tangential Vector Finite Elements for Tetrahedra. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 8(3): 127–129. doi: 10.1109/75.661137
- Agullo, E., 2008. Méthodes Directes Hors-Mémoire (Out-of-Core) Pour la Résolution de Systèmes Linéaires Creux de Grande Taille (Dissertation). Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, Bordeaux.
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., L'Excellent, J. Y., et al., 2012. On Computing Inverse Entries of a Sparse Matrix in an Out-Of-Core Environment. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4): A1975–A1999. doi: 10.1137/100799411
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., L'Excellent, J. Y., et al., 2001. A Fully Asynchronous Multifrontal Solver Using Distributed Dynamic Scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1): 15–41. doi: 10.1137/s0895479899358194
- Avdeev, D. B., Kuvshinov, A. V., Pankratov, O. V., et al., 1998. Three-Dimensional Frequency-Domain Modeling of Airborne Electromagnetic Responses. *Exploration Geophysics*, 29(2): 111. doi: 10.1071/eg98111
- Cai, J., Qi, Y. F., Yin, C. C., 2014. Weighted Laterally-Constrained Inversion of Frequency-Domain Airborne EM Data. *Chinese Journal of Geophysics*, 57(3): 953–960 (in Chinese with English abstract).
- Coggon, J. H., 1971. Electromagnetic and Electrical Modeling by the Finite Element Method. *Geophysics*, 36(1): 132–155. doi: 10.1190/1.1440151
- Fan, C. S., 2013. Research on Complex Resistivity Forward and Inversion with Finite Element Method and Its Application (Dissertation). Jilin University, Changchun, 51–58 (in Chinese with English abstract).
- Farquharson, C. G., Miensopust, M. P., 2011. Three-Dimensional Finite-Element Modelling of Magnetotelluric Data with a Divergence Correction. *Journal of Applied Geophysics*, 75(4): 699–710. doi: 10.1016/j.jappgeo.2011.09.025
- Fèvre, A., L'Excellent, J. Y., Pralet, S., 2006. Scilab and MATLAB Interfaces to MUMPS. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Paris.
- Fountain, D., 1998. Airborne Electromagnetic Systems-50 Years of Development. *Exploration Geophysics*, 29(2): 1. doi: 10.1071/eg98001
- Fraser, D. C., 1981. Magnetite Mapping with a Multicoil Airborne Electromagnetic System. *Geophysics*, 46(11): 1579–1593. doi: 10.1190/1.1441165
- Gu, G. W., Wu, W. P., Li, T. L., 2014. Modeling for the Effect of Magnetotelluric 3D Topography Based on the Vector Finite-Element Method. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 44(5): 1678–1686 (in Chinese with English abstract).
- Haber, E., Ascher, U. M., Oldenburg, D. W., 2004. Inversion of 3D Electromagnetic Data in Frequency and Time Domain Using an Inexact All-at-Once Approach. *Geophysics*, 69(5): 1216–1228. doi: 10.1190/1.1801938
- Hauser, J., Gunning, J., Annetts, D., 2015. Probabilistic Inversion of Airborne Electromagnetic Data under Spatial Constraints. *Geophysics*, 80(2): E135–E146. doi: 10.1190/geo2014-0389.1
- Hohmann, G. W., 1975. Three-Dimensional Induced Polarization and Electromagnetic Modeling. *Geophysics*, 40(2): 309–324. doi: 10.1190/1.1440527
- Hu, Y. C., 2015. Three Dimensional Tensor Controlled Source Electromagnetic Modeling Based the Vector Finite Element (Dissertation). Jilin University, Changchun, 58–59 (in Chinese with English abstract).
- Huang, H., Palacky, G. J., 1991. Damped Least-Squares Inversion of Time-Domain Airborne EM Data Based on Singular Value Decomposition. *Geophysical Prospecting*, 39(6): 827–844.
- Huang, H. P., Wang, W. Z., 1990. Inversion of Time-Domain Airborne Electromagnetic Data. *Chinese Journal of Geophysics*, 33(1): 87–97 (in Chinese with English ab-

- stract).
- Huang, J. G., Ruan, B. Y., Bao, G. S., 2002. Fem under Quantic-Boundary Condition for Modeling Resistivity on 3-D Geoelectric Section. *Journal of Guilin Institute of Technology*, (1): 11—14 (in Chinese with English abstract).
- Jahandari, H., Farquharson, C. G., 2014. A Finite-Volume Solution to the Geophysical Electromagnetic Forward Problem Using Unstructured Grids. *Geophysics*, 79(6): E287—E302. doi: 10.1190/GEO2013—0312.1.
- Jin, J. M., 1998. Electromagnetic FEM. Translated by Wang J. G., Xi'an University of Electronic Science and Technology Press, Xi'an, 96 (in Chinese).
- Key, K., Weiss, C., 2006. Adaptive Finite-Element Modeling Using Unstructured Grids; The 2D Magnetotelluric Example. *Geophysics*, 71(6): G291—G299. doi: 10.1190/1.2348091
- Li, Y., Wu, X. P., Lin, P. R., 2015. Three-Dimensional Controlled Source Electromagnetic Finite Element Simulation Using the Secondary Field for Continuous Variation of Electrical Conductivity within Each Block. *Chinese Journal of Geophysics*, 58(3): 1072—1087 (in Chinese with English abstract).
- Liu, Y. H., Yin, C. C., 2013. 3D Inversion for Frequency-Domain HEM Data. *Chinese Journal of Geophysics*, 56(12): 4278—4287 (in Chinese with English abstract).
- Livelybrooks, D., 1993. Program 3Dfeem; A Multidimensional Electromagnetic Finite Element Model. *Geophysical Journal International*, 114(3): 443—458. doi: 10.1111/j.1365—246x.1993.tb06978.x
- Macnae, J. C., Smith, R., Polzer, B. D., et al., 1991. Conductivity-Depth Imaging of Airborne Electromagnetic Step-Response Data. *Geophysics*, 56(1): 102—114. doi: 10.1190/1.1442945
- Mitsuhata, Y., Uchida, T., 2004. 3D Magnetotelluric Modeling Using the T- Ω Finite-Element Method. *Geophysics*, 69(1): 108—119. doi: 10.1190/1.1649380
- Nabighian, M. N., 1992. Electromagnetic Methods in Applied Geophysics Volume 1, Theory Society of Exploration Geophysicists. Translated by Zhao, J. X., et al., Geology Press, Beijing, 306 (in Chinese).
- Newman, G. A., Alumbaugh, D. L., 1995. Frequency-Domain Modelling of Airborne Electromagnetic Responses Using Staggered Finite Differences 1. *Geophysical Prospecting*, 43(8): 1021—1042. doi: 10.1111/j.1365—2478.1995.tb00294.x
- Oldenburg, D. W., Haber, E., Shekhtman, R., 2013. Three Dimensional Inversion of Multisource Time Domain Electromagnetic Data. *Geophysics*, 78(1): E47—E57. doi: 10.1190/geo2012—0131.1
- Pemberton, R. H., 1962. Airborne Electromagnetics in Review. *Geophysics*, 27(5): 691—713. doi: 10.1190/1.1439081
- Puzryev, V., Koldan, J., de la Puente, J., et al., 2013. A Parallel Finite-Element Method for Three-Dimensional Controlled-Source Electromagnetic Forward Modelling. *Geophysical Journal International*, 193(2): 678—693. doi: 10.1093/gji/ggt027
- Rachowicz, W., Zdunek, A., 2011. Application of the FEM with Adaptivity for Electromagnetic Inverse Medium Scattering Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(29—32): 2337—2347. doi: 10.1016/j.cma.2011.04.005
- Raiche, A., 1998. Modelling the Time-Domain Response of AEM Systems. *Exploration Geophysics*, 29(2): 103—106. doi: 10.1071/eg998103
- Ruan, B. Y., Xiong, B., Xu, S. Z., 2001. Finite Element Method for Modeling Resistivity Sounding on 3-D Geoelectric Section. *Earth Science*, 26(1): 73—77 (in Chinese with English abstract).
- Schwarzbach, C., Haber, E., 2013. Finite Element Based Inversion for Time-Harmonic Electromagnetic Problems. *Geophysical Journal International*, 193(2): 615—634. doi: 10.1093/gji/ggt006
- Tang, J. T., Zhang, L. C., Gong, J. Z., et al., 2014. 3D Frequency Domain Controlled Source Electromagnetic Numerical Modeling with Coupled Finite-Infinite Element Method. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 45(4): 1251—12603 (in Chinese with English abstract).
- Tang, J. T., Wang, F. Y., Ren, Z. Y., 2010. 2.5D DC Resistivity Modeling by Adaptive Finite-Element Method with Unstructured Triangulation. *Chinese Journal of Geophysics*, 53(3): 708—716. doi: 10.3969/j.issn.0001—5733.2010.03.026
- Tong, X. Z., Liu, J. X., Xie, W., et al., 2009. Three-Dimensional Forward Modeling for Magnetotelluric Sounding by Finite Element Method. *Journal of Central South University of Technology*, 16(1): 136—142. doi: 10.1007/s11771—009—0023—5
- Wang, W. P., Zeng, Z. F., Wu, C. P., 2015. Coil Attitude Influence and Attitude Correction Method for Frequency Domain Airborne Electromagnetic System. *Earth Science*, 7(7): 1266—1275 (in Chinese with English abstract).
- Wannamaker, P. E., Hohmann, G. W., SanFilipo, W. A., 1984. Electromagnetic Modeling of Three-Dimensional Bodies

- in Layered Earths Using Integral Equations. *Geophysics*, 49(1): 60–74. doi: 10.1190/1.1441562
- Xu, S. Z., 1994. The Finite Element Method in Geophysics. Science Press, Beijing, 247 (in Chinese).
- Yang, B., Xu, Y. X., He, Z. X., 2012. 3D Frequency-Domain Modeling of Marine Controlled Source Electromagnetic Responses with Topography Using Finite Volume Method. *Chinese Journal of Geophysics*, 55(4): 1390–1399 (in Chinese with English abstract).
- Yang, H. J., Pan, H. P., Luo, M., et al., 2015. Numerical Modeling for Transient Anomalous Secondary Electromagnetic of Tabular Orebody in Borehole. *Earth Science*, 40(10): 1689–1700 (in Chinese with English abstract).
- Yin, C. C., Hodges, G., 2007. Simulated Annealing for Airborne EM Inversion. *Geophysics*, 72(4): F189–F195. doi: 10.1190/1.2736195
- Yin, C. C., Huang, W., Ben, F., 2013. The Full-Time Electromagnetic Modeling for Time-Domain Airborne Electromagnetic Systems. *Chinese Journal of Geophysics*, 56(9): 3153–3162. (in Chinese with English abstract)
- Yin, C. C., Huang, X., Liu, Y. H., et al., 2014. Footprint for Frequency-Domain Airborne Electromagnetic Systems. *Geophysics*, 79(6): E243–E254. doi: 10.1190/geo2014-0007.1
- Yin, C. C., Qi, Y. F., Liu, Y. H., et al., 2014. Trans-Dimensional Bayesian Inversion of Frequency-Domain Airborne EM Data. *Chinese Journal of Geophysics*, 57(9): 2971–2980 (in Chinese with English abstract).
- Yin, C. C., Zhang, B., Liu, Y. H., et al., 2015. 2.5-D Forward Modeling of the Time-Domain Airborne EM System in Areas with Topographic Relief. *Chinese Journal of Geophysics*, 58(4): 1411–1424. (in Chinese with English abstract)
- Zhang, J. F., Tang, J. T., Yu, Y., et al., 2009. Three Dimensional Controlled Source Electromagnetic Numerical Simulation Based on Electric Field Vector Wave Equation Using Finite Element Method. *Chinese Journal of Geophysics*, 52(12): 3132–3141 (in Chinese with English abstract).
- Zyserman, F. I., Santos, J. E., 2000. Parallel Finite Element Algorithm with Domain Decomposition for Three-Dimensional Magnetotelluric Modelling. *Journal of Applied Geophysics*, 44(4): 337–351. doi: 10.1016/S0926-9851(00)00012-4
- 向约束反演. *地球物理学报*, 57(1): 953–960.
- 范翠松, 2013. 基于有限元法的复电阻率正反演研究及应用 (博士学位论文). 吉林大学, 长春, 51–58.
- 顾观文, 吴文鹏, 李桐林, 2014. 大地电磁场三维地形影响的矢量有限元数值模拟. *吉林大学学报(地球科学版)*, 44(5): 1678–1686.
- 胡英才, 2015. 矢量有限元三维 CSAMT 正演模拟 (博士学位论文). 长春: 吉林大学, 58–59.
- 黄皓平, 王维中, 1990. 时间域航空电磁数据的反演. *地球物理学报*, 33(1): 87–97.
- 黄俊革, 阮百尧, 鲍光淑, 2002. 齐次边界条件下三维地电断面电阻率有限元数值模拟法. *桂林工学院学报*, 22(1): 11–14.
- 金建铭, 1998. 电磁场有限元方法. 王建国译, 西安: 西安电子科技大学出版社, 96.
- 李勇, 吴小平, 林平荣, 2015. 基于二次场电导率分块连续变化的三维可控源电磁有限元数值模拟. *地球物理学报*, 58(3): 1072–1087.
- 刘云鹤, 殷长春, 2013. 三维频率域航空电磁反演研究. *地球物理学报*, 56(12): 4278–4287.
- Nabighian, M. N., 1992. 勘察地球物理电磁法第一卷理论. 赵经祥等译, 北京: 地质出版社, 306.
- 阮百尧, 熊彬, 徐世浙, 2001. 三维地电断面电阻率测深有限元数值模拟. *地球科学*, 26(1): 73–77.
- 汤井田, 张林成, 公劲喆, 等, 2014. 三维频率域可控源电磁法有限元-无限远结合数值模拟. *中南大学学报(自然科学版)*, 45(4): 1251–1260.
- 王卫平, 曾昭发, 吴成平, 2015. 频率域航空电磁系统线圈姿态变化影响及校正方法. *地球科学*, 7(7): 1266–1275.
- 徐世浙, 1994. 地球物理中的有限单元法. 北京: 科学出版社, 247.
- 杨波, 徐义贤, 何展翔, 2012. 考虑海底地形的三维频率域可控源电磁响应有限体积法的模拟. *地球物理学报*, 55(4): 1390–1399.
- 杨怀杰, 潘和平, 骆森, 等, 2015. 井中板状矿体瞬态异常二次场数值模拟. *地球科学*, 40(10): 1689–1700.
- 殷长春, 黄威, 贲放, 2013. 时间域航空电磁系统瞬变全时响应正演模拟. *地球物理学报*, 56(9): 3153–3162.
- 殷长春, 齐彦福, 刘云鹤, 等, 2014. 频率域航空电磁数据变系数贝叶斯反演研究. *地球物理学报*, 57(9): 2971–2980.
- 殷长春, 张博, 刘云鹤, 等, 2015. 2.5 维起伏地表条件下时间域航空电磁正演模拟. *地球物理学报*, 58(4): 1411–1424.
- 张继峰, 汤井田, 喻言, 等, 2009. 基于电场矢量波动方程的三维可控源电磁法有限元法数值模拟. *地球物理学报*, 52(12): 3132–3141.

附中文参考文献

蔡晶, 齐彦福, 殷长春, 2014. 频率域航空电磁数据的加权横