

<https://doi.org/10.3799/dqkx.2022.369>



基于摩擦与变形耗能的滚石切向恢复系数影响因素

黄福有^{1,2}, 张路青¹, 周 剑³, 马显东^{1,2}

1. 中国科学院地质与地球物理研究所页岩气与地质工程重点实验室 北京 100029
2. 中国科学院大学 地球与行星科学学院, 北京 100049
3. 北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室 北京 100124

摘要: 切向恢复系数是滚石碰撞回弹的重要控制参数, 目前的理论公式不能完全反映其作用机制, 这是滚石动力学研究的一个难点问题. 为此, 根据滚石不同的回弹状态, 提出基于入射角度变化的切向力模型; 进一步, 以切向接触理论和动能定理为基础, 考虑碰撞过程中切向的摩擦耗能及变形耗能, 推导了切向恢复系数的理论公式; 最后研究入射速度、入射角、被撞击物体的变形模量对切向恢复系数的影响. 结果表明: 滚动回弹的切向恢复系数主要受切向变形量的影响; 滑动回弹时, 入射速度对切向恢复系数的影响参数为 $v^{-\frac{1}{20}}$, 切向恢复系数随着其增加而缓慢减少; 入射角度对切向恢复系数的影响参数为 $\frac{\cos \frac{1}{20} \beta_i}{\tan \beta_i}$, 切向恢复系数随其增加而增大; 被撞击物体的变形模量对切向恢复系数的影响参数为 $E_2^{-\frac{5}{8}}$, 切向恢复系数随其增加而增加. 基于摩擦与变形耗能的切向恢复系数计算公式为滚石的碰撞回弹过程提供了新的计算模型.

关键词: 滚石; 斜碰撞; 切向恢复系数; 能量损失; 影响因素; 工程地质.

中图分类号: P642.21

文章编号: 1000-2383(2022)12-4583-13

收稿日期: 2022-06-29

Influence Factors of Tangential Restitution Coefficient of Rolling Stone Based on Friction and Deformation Energy Dissipation

Huang Fuyou^{1,2}, Zhang Luqing¹, Zhou Jian³, Ma Xiandong^{1,2}

1. Key Laboratory of Shale Gas and Geoenvironment, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China
2. College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China
3. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

Abstract: The tangential restitution coefficient is an important control parameter for the rebound of the rolling stone, and the current theoretical formula can not fully reflect its mechanism. Firstly, according to the different rebound states of the rolling stone, a tangential force model based on the change of incident angle is proposed. Further considering the tangential friction energy dissipation and deformation energy dissipation in the collision process, the theoretical formula of tangential restitution coefficient is

基金项目: 国家重点研发计划项目(No.2019YFC1509703); 第二次青藏高原综合科学考察研究资助项目(No.2019QZK0904); 中国科学院重点部署项目(No.KFZD-SW430); 国家自然科学基金项目(No.41972287).

作者简介: 黄福有(1994-), 男, 硕士研究生, 主要从事地质工程和地质灾害方面的研究工. ORCID: 0000-0003-2444-5488. E-mail: huangfuyou@mail.iggcas.ac.cn

引用格式: 黄福有, 张路青, 周剑, 马显东, 2022. 基于摩擦与变形耗能的滚石切向恢复系数影响因素. 地球科学, 47(12): 4583-4595.

Citation: Huang Fuyou, Zhang Luqing, Zhou Jian, Ma Xiandong, 2022. Influence Factors of Tangential Restitution Coefficient of Rolling Stone Based on Friction and Deformation Energy Dissipation. *Earth Science*, 47(12): 4583-4595.

derived based on tangential contact theory and kinetic energy theorem. Finally, the influence of various factors on the tangential restitution coefficient is studied. The results show that the tangential restitution coefficient of rolling rebound is mainly affected by tangential deformation. When the rolling stone slips, the influence parameter of incident velocity on the tangential restitution coefficient is $v_i^{-\frac{1}{20}}$, and the tangential restitution coefficient decreases slowly as it increases, while the influence parameter of incident angle on tangential restitution coefficient is $\frac{\cos^{20}\beta_i}{\tan\beta_i}$, and the tangential restitution coefficient increases with its increase, the influence parameter of the deformation modulus of the impacted object on the tangential restitution coefficient is $E_2^{-\frac{5}{8}}$, and the tangential restitution coefficient increases with its increase. The tangential recovery coefficient based on friction and deformation energy dissipation provides a new computational model for the collision process of rolling stone.

Key words: rolling stone; oblique collision; tangential restitution coefficient; energy loss; influence factor; engineering geology.

0 引言

我国是个多山的国家,山区面积占国土总面积的近三分之二,地形地貌多变、地质构造复杂、地震活动频发等条件为山区崩塌滚石、滑坡、泥石流等地质灾害的孕育和发生提供了有利环境.滚石,是指个别块石因某种原因从斜坡或陡崖表面失稳后经下落、回弹、跳跃、滚动或滑动等运动方式中的一种或几种的组合沿着坡面向下快速运动,最后在较平缓的地带或障碍物附近静止下来的一个动力演化过程(Azzoni and Freitas, 1995; 张路青等, 2004; 罗刚等, 2022).多山地带的滚石事件往往具有多发性、隐蔽性、不确定性等不易掌握的规律或特征,当滚石运动范围内有人类活动或设施时,则可造成滚石灾害.近二十年来,由于我国工程活动对自然山体干扰的加剧,再加上地震频发、极端气候事件增多等不利因素,滚石灾害发生的频率及强度愈发增大,对其危害范围内的生命财产安全的威胁不断加大(Scheiner *et al.*, 2006).例如,2008年5月12日汶川大地震触发了数以万计的高能级崩塌滚石事件,不仅直接造成了大量的人员伤亡和财产损失,而且还引起山体的不同程度损伤和松动(胡新丽等, 2011).此外,滚石灾害还对房建、交通及环境造成巨大的破坏(何思明等, 2013; 王运生等, 2022; 刘新锋等, 2022).相对于滑坡、泥石流等地质灾害来说,多山地带遭遇滚石灾害的可能性和风险水平更高,但相关基础理论和防灾减灾技术方法的研究却非常薄弱.危岩体失稳后与坡面及各类障碍物(包括防护结构)之间会发生动力相互作用,相应的滚石动力学机制与运动学规律不仅是亟待深入研究的基础理论问题,也是制约当前滚石灾害治理水平的瓶颈.

滚石撞击问题是滚石动力学研究的核心问题,而碰撞恢复系数与峰值冲击力是其中的重点与难点.碰撞恢复系数决定着滚石的运动状态,峰值冲击力是滚石防护结构设计的重要参数.目前有关滚石冲击力的研究较多(Dussauge *et al.*, 2003; Cagnoli and Manga, 2003; 陈颖骐和王全才, 2018),主要基于Hertz理论与动量定理.碰撞恢复系数在颗粒材料等领域研究广泛(Wu *et al.*, 2003; Seifried *et al.*, 2005; Brizmer *et al.*, 2006; Mangwandi *et al.*, 2007),但在滚石灾害研究领域的成果却很少.碰撞恢复系数可分为法向恢复系数与切向恢复系数,二者共同决定了滚石撞击岩土体或人工构筑物表面后的回弹速度与回弹方向.在试验方面,Giani *et al.* (2004)依据大比尺的现场试验,通过影像记录滚石撞击坡面前后的速度,反算得到试验条件下的碰撞恢复系数.叶四桥和巩尚卿(2015)将落石试件从不同的高度释放,利用高速摄像机记录试件碰撞坡面的过程,研究了入射速度对法向恢复系数的影响.章广成等(2011)开展落石碰撞试验并进行数值模拟,分析了入射角对法向恢复系数的影响.其他学者还研究了坡面状态、滚石特征等因素对恢复系数的影响(Chau *et al.*, 2002; Labiouse and Heidenreich, 2009).在理论分析方面,秦志英和陆启韶(2006)推导了线性、非线性阻尼模型等几种碰撞过程模型与恢复系数的关系,并建立了统一的恢复系数表示方法.杨海清和周小平(2009)基于弹性碰撞理论,研究了滚石不同运动形式下的速度,得到与滚石速度、坡面材料有关的碰撞恢复系数计算公式.梅雪峰等(2019)利用经典接触理论与动能定理,得到了落石碰撞过程中的法向恢复系数.从已有的研究成果来看,有关法向恢复系数的研究还亟待深入,而有关

切向恢复系数的研究则更为薄弱;当前有关恢复系数的研究手段以模型试验为主,而在试验过程中往往采用中小尺寸模型,这使得试验材料的物理力学性质与实际情况存在差异,无法真实还原滚石的运动特性(Buzzi *et al.*, 2012;陈宇龙, 2013).

相对于模型试验,理论分析更能反映出滚石碰撞过程的机制,也更有利于参数敏感性分析和防护工程设计.目前在对切向恢复系数的理论研究方面虽取得一定成果(吕庆等, 2003; Schwager *et al.*, 2008;何思明等, 2009;章广成等, 2012),但仍存在很多问题需要解决.吕庆等(2003)将滚石看成刚性体,没有直接讨论滚石碰撞过程中的非线性变形以及摩擦问题.章广成等(2012)根据动量定理推导出的切向恢复系数计算公式虽然比 Schwager *et al.* (2008)提出得更具系统性,但两者都忽略了切向变形的影响.何思明等(2009)提出的切向恢复系数计算模型考虑了恒定法向荷载下发生的切向变形,但关于法向荷载恒定的假设与实际还有很大出入.对于碰撞问题,撞击过程中的接触滑动与变形均会影响能量的传递与转化,而且冲击荷载会随时间发生变化.忽略上述因素的影响,会使得推导的结果不能完全反映出实际的碰撞回弹过程.

为了从理论上分析滚石碰撞回弹的运动机制,本文以接触力学、切向接触理论为基础,考虑到滚石撞击过程中的滑动摩擦耗能与变形耗能,从能量变化的角度研究滚石切向恢复系数,给出了滚石切向恢复系数的具体的计算公式和步骤.为研究滚石撞击防护物体的运动轨迹及运动规律提供了方法,也为滚石灾害定量评价提供理论依据.

1 问题的提出

滚石灾害常发生于高山峡谷地区,滚石的基本运动形式可分:坠落、滑动、滚动、碰撞回弹和抛物运动(图 1).

滚石与坡面或防护结构之间极多数情况下发生的是斜碰撞(图 2).为便于力学分析,将斜碰撞分解为法向碰撞与切向碰撞,其中法向碰撞决定了整个过程的作用时间.

如图 2, v 为入射速度, v' 为回弹速度, β_i 为入射角,定义为入射速度与地面法向之间的夹角. v_n 、 v_t 为入射时的法向与切向速度, v'_n 与 v'_t 为回弹时的法向与切向速度(式 1).

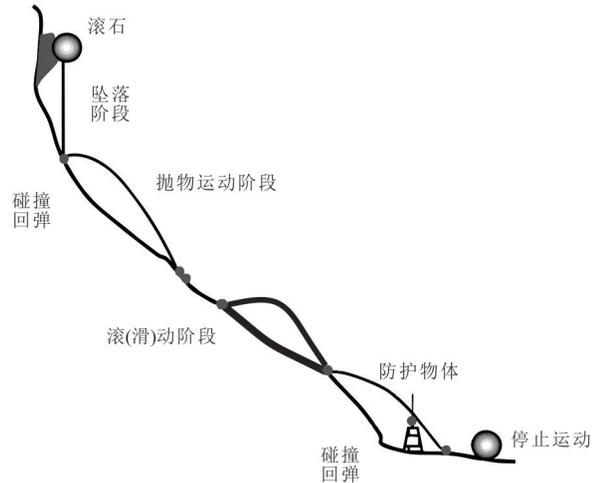


图 1 滚石运动过程示意图
Fig.1 Movement process of rockfall

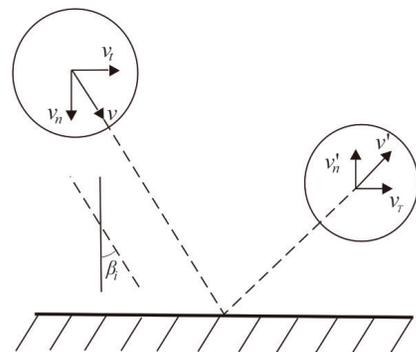


图 2 斜碰撞瞬时示意图
Fig.2 Schematic diagram of instantaneous oblique collision

$$\begin{aligned} v_n &= v \cos \beta_i \\ v_t &= v \sin \beta_i \end{aligned} \tag{1}$$

滚石在碰撞过程中发生的是非完全弹性碰撞,所谓非完全弹性碰撞,是指在碰撞过程存在能量消耗,损失的动能会部分转化为物体的内能,变形不能完全恢复,存在能量损失.

滚石法向碰撞恢复系数的定义为法向回弹速度与入射速度的比值,也可以采用滚石法向输出能量 w'_n 与输入能量 w_n 进行定义:

$$e_n = \frac{v'_n}{v_n} = \sqrt{\frac{w'_n}{w_n}} \tag{2}$$

对于切向恢复系数,考虑到撞击过程中的摩擦耗能,用滚石输出、输入的切向能量 w_T 与 w_t 进行定义:

$$e_t = \sqrt{\frac{w_T}{w_t}} \tag{3}$$

2 法向碰撞与法向恢复系数

本文采用的法向恢复系数基于准静态接触力学理论(刘涌江, 2002), 当撞击速度与撞击体的弹性波速相比足够小时, 即可满足准静态理论的前提条件. 半径分别为 R_1, R_2 , 质量分别为 m_1 和 m_2 的两球体发生正碰撞, 撞击速度分别为 v_1 和 v_2 , 回弹时的速度分别为 v'_1 和 v'_2 , 撞击过程中两球体接近的距离为 δ , 接触区半径为 a , 根据准静态接触力学, 有:

$$\frac{1}{2}m(v_1 - v_2)^2 = \int_0^{a_m} \pi a^2 \sigma_d \left(\frac{a}{R}\right) da = \frac{\pi a_m^4 \sigma_d}{4R}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(v'_1 - v'_2)^2 = \frac{3\pi^2 a_m^3 \sigma_d^2}{10E}, \quad (5)$$

式(4)和(5)中, $\frac{1}{E} = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}$, E_1, μ_1, E_2, μ_2 分别为两球体的弹性模量与泊松比; R 为等效半径, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

令滚石的初始速度 $v_1 = v_n$, 被撞击物体在碰撞过程中固定不动, 质量视为无穷大, 则恢复系数可表示为:

$$e_n = \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = \left(\frac{3^{\frac{5}{4}} \pi}{10 \times 4^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma_d^5}{E^4 \rho}\right)^{\frac{1}{8}} v_n^{-\frac{1}{4}}, \quad (6)$$

式(6)中, σ_d 可近似取 E_2 的 0.1 倍, ρ 为滚石密度.

梅雪峰等(2019)、陈颖骐和王全才(2018)研究了弹塑性碰撞的最大冲击力 F_{Nm} , 其表达式为:

$$F_{Nm} = \frac{4}{3} ER^{\frac{1}{2}} \left(\frac{15mv^2}{16R^{\frac{1}{2}}E}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{a_y}{a}\right)^3 + \pi p_y a_p^2, \quad (7)$$

式(7)中 a 为接触面半径, a_y 为初始屈服对应的接触面半径, $a^2 = a_y^2 + a_p^2$, p_y 为接触屈服压应力(Vu-Quoc *et al.*, 2004):

$$p_y = [\eta(\mu) \sigma_y]^3 \frac{\pi^3 R^2 (1 - \mu^2)^2}{6E^2}. \quad (8)$$

式(8)中, μ 为滚石的泊松比; $\eta(\mu)$ 为 μ 的函数, $\eta(0.3) = 1.613$, $\eta(0.4) = 1.738$, 当 μ 为其他值时, 作线性插值处理; σ_y 为被冲击物的屈服强度.

章广成等(2012)研究了非完全弹性碰撞的压缩与回弹时间, 见式(9)和(10):

$$t_1 = 1.47 \left(\frac{5c}{4n}\right)^{\frac{2}{5}} v_n^{-\frac{1}{5}}, \quad (9)$$

$$t_2 = 1.47 \left(\frac{5c}{4n}\right)^{\frac{2}{5}} (e_n v_n)^{-\frac{1}{5}}, \quad (10)$$

式(9)和(10)中, $c = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$; $k_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}$; $k_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}$; $n = \frac{4}{3(k_1 + k_2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$.

则整个碰撞的时间为:

$$T = t_1 + t_2 = 1.47 \left(\frac{5c}{4n}\right)^{\frac{2}{5}} v_n^{-\frac{1}{5}} (1 + e_n)^{-\frac{1}{5}}. \quad (11)$$

在滚石冲击过程中, 冲击力的时程曲线可用正弦曲线近似表示. 考虑到碰撞过程中的能量损失, 在压缩加载阶段与回弹恢复阶段用不同的正弦函数来表示冲击力, 即:

$$F_N(t) = F_{Nm} \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) \quad t \in (0, t_1)$$

$$F_N(t) = F_{Nm} \sin\left[\frac{\pi}{2(T - t_1)} (T - t)\right] \quad t \in (t_1, T) \quad (12)$$

3 切向碰撞与切向恢复系数

3.1 切向冲击力

切向冲击力控制着滚石切向速度的变化与切向变形量的大小, 是影响切向运动的重要参数. Mindlin(1949)研究了两球体在法向压力下接触面的切向力分布规律. Vu-Quoc *et al.*(2004)提出了一种弹塑性摩擦切向力一位移模型. 何思明等(2009)在 Mindlin 接触理论上研究了切向力与切向变形的关系.

滚石的回弹形式受入射角的影响, Kharaz *et al.*(2001)的研究表明: 当碰撞接触区为粘滞状态时, 滚石的回弹形式表现为滚动; 当碰撞接触区整体滑动时, 滚石的回弹形式表现为滑动. Maw *et al.*(1976)研究了入射角对滚石回弹形式的影响并定义了接触区粘滞与滑动的临界入射角 θ_c .

$$\theta_c = \arctan \frac{f}{\kappa}, \quad (13)$$

式(13)中, f 为摩擦系数, $\kappa = \frac{\frac{1 - \mu_1}{G_1} + \frac{1 - \mu_2}{G_2}}{1 - \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1 - \frac{1}{2}\mu_2}{G_2}}$.

G_1 为滚石的泊松比与剪切模量, μ_2, G_2 为被撞击体的泊松比与剪切模量.

考虑到碰撞过程中接触区的不同状态,本文在 Maw *et al.* (1976)、经典库仑准则的研究基础上,提出一种新的切向力计算模型,表达式为:

$$\begin{aligned} F_T &= \psi_i f F_N \quad \beta_i \leq \theta_c \\ F_T &= f F_N \quad \beta_i > \theta_c \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)中, $\psi_i = \frac{\kappa}{f} \tan \beta_i$, β_i , f , κ 定义见上.

由式(14)可以看出,当 $\beta_i = 0$ 时, $\psi_i = 0$, 此时切向力 $F_T = 0$, 为正碰撞; 当 $\beta_i = 90^\circ$ 时, 切向力 $F_T = f F_N$, 计算模型满足经典库仑准则. 切向力与入射角的关系见图 3. 切向力与滑动摩擦力的比值分为两个阶段: 接触区为粘滞状态时, 两者比值与入射角成正比; 接触区为滑动状态时, 比值为常数 1.

冲击力随入射角的变化规律(图 4)表明: 碰撞过程中合力与法向冲击力随入射角的增加而减小, 而切向冲击力在黏滞阶段随入射角的增大而增加. 在其达到临界摩擦角时, 切向力达到最大, 随后进入完全滑动阶段, 切向力随入射角的增大而减小.

3.2 切向恢复系数

目前对切向恢复系数的理论研究虽取得了一些成果(吕庆等, 2003; Schwager *et al.*, 2008; 何思明等, 2009; 章广成等, 2012), 但在推导过程中都做了部分简化, 忽略了滑动或切向变形带来的影响, 这会使得推导结果在数值上偏大, 不能完全反应滚石的碰撞回弹过程. 根据恢复系数的定义方法, 考虑到滚石切向不同的回弹形式, 以及切向运动中摩擦与变形所消耗的能量, 本文用输出与输入能量的比值表示切向恢复系数.

3.2.1 滚动回弹切向恢复系数 当冲击入射角 β_i 小于临界入射角 θ_c 时, 碰撞接触区为粘滞状态. 回弹时, 滚石的运动状态表现为滚动, 碰撞过程中的能量以不可恢复的变形能的形式进行耗散.

图 5 为法向压力 F_N 恒定下, 滚石的切向荷载-变形曲线, 切向压缩阶段(OA 段), 变形量的计算公式(Vu-Quoc *et al.*, 2004)为:

$$\epsilon_1 = \frac{3(2-\mu)fF_N}{16Ga} \left[1 - \left(1 - \frac{F_T}{fF_N} \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (15)$$

当滚石的切向冲击力达到最大后, 开始卸载, ϵ_r 为切向残余变形, 回弹过程中的变形量可表示为(AC 段):

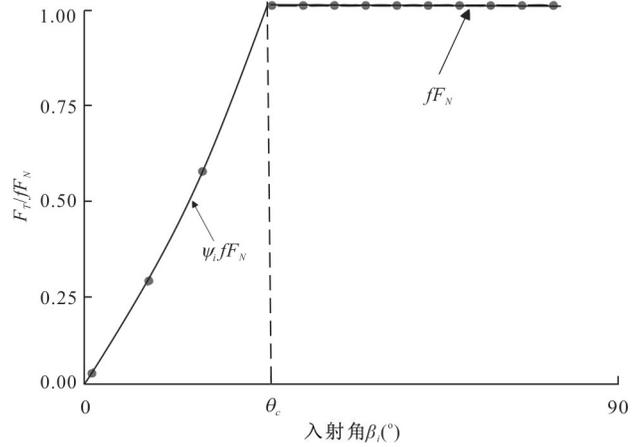


图 3 切向力与入射角的关系

Fig.3 The relationship between tangential force and incident angle

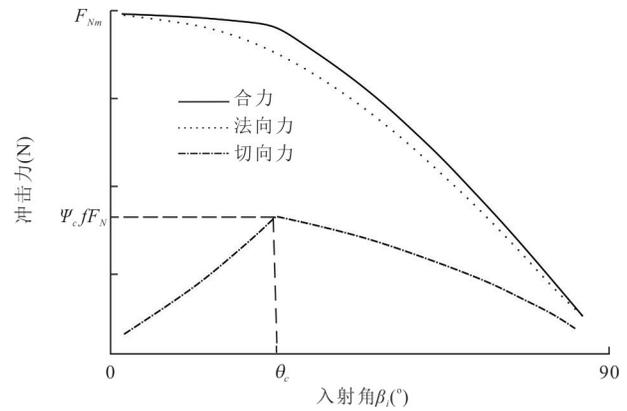


图 4 冲击力与入射角的关系

Fig.4 The relationship between impact force and incident angle

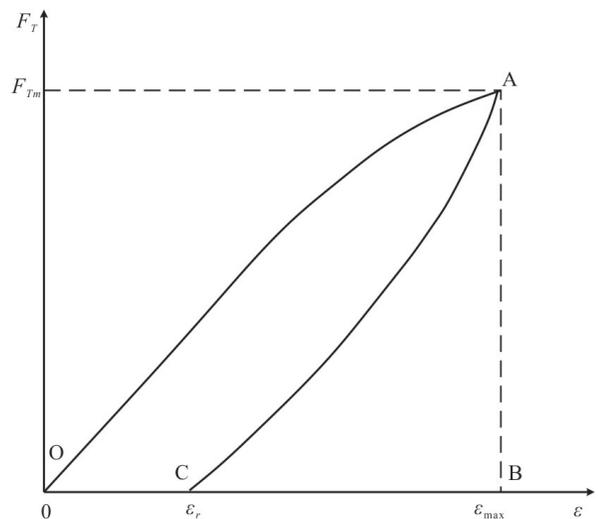


图 5 滚石切向荷载-变形曲线

Fig.5 Tangential force-displacement curves of rolling stone

$$\epsilon_2 = \frac{3(2-\mu)fF_N}{16Ga} \left[2 \left(1 - \frac{F_{Tm} - F_T}{2fF_N} \right) - \left(1 - \left(\frac{F_T}{fF_N} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \right], \quad (16)$$

式(16)中, $\frac{2-\mu}{G} = \frac{2-\mu_1}{G_1} + \frac{2-\mu_2}{G_2}$, F_{Tm} 代表最大切向冲击力。

考虑到碰撞过程中切向力的变化,将 $F_T = \phi_i fF_N$ 带入式(15)、(16),可得压缩阶段与回弹阶段的切向变形量分别为:

$$\epsilon_1^r = \frac{3(2-\mu)fF_N}{16Ga} \left[1 - (1 - \phi_i)^{\frac{2}{3}} \right], \quad (17)$$

$$\epsilon_2^r = \frac{3(2-\mu)fF_N}{16Ga} \left[1 + \phi_i - (1 - \phi_i)^{\frac{2}{3}} - \frac{F_{Nm}}{F_N} \phi_i \right]. \quad (18)$$

则压缩阶段吸收的能量 w_1^r 与回弹阶段释放的能量 w_2^r 分别为:

$$w_1^r = \phi_i \left[1 - (1 - \phi_i)^{\frac{2}{3}} \right] f^2 \frac{3(2-\mu)}{16G} \int_0^{t_1} \frac{F_N^2}{a} dt, \quad (19)$$

$$w_2^r = \phi_i f^2 \frac{3(2-\mu)}{16G} \int_{t_1}^T \frac{F_N^2}{a} \left[\eta_i - \frac{F_{Nm}}{F_N} \phi_i \right] dt, \quad (20)$$

$$\eta_i = 1 + \phi_i - (1 - \phi_i)^{\frac{2}{3}}. \quad (21)$$

则基于能量法的切向恢复系数可表示为:

$$e_t = \sqrt{\frac{w_T}{w_t}} = \sqrt{\frac{w_2^r}{w_1^r}}. \quad (22)$$

3.2.2 滑动回弹切向恢复系数 当冲击入射角 β_i 大于临界入射角 θ_c 时,滚石的切向运动状态表现为滑动,碰撞过程中的摩擦、不可恢复变形都会引起能量损耗。

首先,考虑摩擦引起的能量损失.滚石的输入的初始切向能量为 $w_0 = \frac{1}{2} m v_t^2$, 在 $t \in (0, t_1]$ 时,摩擦力可用下式表示:

$$F_T(t) = fF_{Nm} \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right). \quad (23)$$

t_1 时刻的速度 v_{t_1} 可表示为:

$$v_{t_1} = v_t - \int_0^{t_1} f \frac{F_{Nm}}{m} \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) dt. \quad (24)$$

在 $t \in (t_1, T]$ 时,摩擦力可以表示为:

$$F_T(t) = fF_{Nm} \sin\left[\frac{\pi}{2(T-t_1)}(T-t)\right]. \quad (25)$$

T 时刻的速度 v_T 可表示为:

$$v_T = v_{t_1} - \int_{t_1}^T f \frac{F_{Nm}}{m} \sin\left(\frac{\pi}{2(T-t_1)}(T-t)\right) dt. \quad (26)$$

整理得:

$$v_T = v_{t_1} - 2f \frac{F_{Nm}}{m} \frac{2T}{\pi}. \quad (27)$$

则在只考虑摩擦引起能量损失时,输出的能量为 $w_1^s = \frac{1}{2} m v_T^2$.

其次,考虑变形引起的能量损失.对于滚石碰撞后发生滑动的情况,公式(15)、(16)同样适用,将滑动的过程分解成无数个时刻,每一时刻的切向力都在变化,是时间的函数.将 $F_T = fF_N$ 带入,压缩阶段的切向变形(随时间变化)为:

$$\epsilon_2^s = \frac{3(2-\mu)fF_N}{16Ga}. \quad (28)$$

回弹过程中的变形为:

$$\epsilon_3^s = \frac{3(2-\mu)fF_N}{16Ga} \left(2 - \frac{F_{Nm}}{F_N} \right). \quad (29)$$

在切向压缩过程中吸收的能量为:

$$w_2^s = f^2 \frac{3(2-\mu)}{16G} \int_0^{t_1} \frac{F_N^2}{a} dt. \quad (30)$$

同理,在切向恢复过程中释放的能量为

$$w_3^s = f^2 \frac{3(2-\mu)}{16G} \int_{t_1}^T \frac{F_N(2F_N - F_{Nm})}{a} dt. \quad (31)$$

将式(12)带入公式(30)和(31),可得:

$$w_2^s = \zeta \int_0^{t_1} \sin^{\frac{5}{3}}\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) dt, \quad (32)$$

$$w_3^s = 2\zeta \int_{t_1}^T \sin^{\frac{5}{3}}\left[\frac{\pi}{2(T-t_1)}(T-t)\right] dt - \zeta \int_{t_1}^T \sin^{\frac{2}{3}}\left[\frac{\pi}{2(T-t_1)}(T-t)\right] dt, \quad (33)$$

$$\text{其中: } \zeta = f^2 \frac{3(2-\mu)}{16G} \left[\frac{3(k_1 + k_2)R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)} \right]^{-\frac{1}{3}} F_{Nm}^{\frac{5}{3}}.$$

考虑碰撞过程中摩擦与不可恢复变形引起的能量损失,滚石滑动回弹的切向恢复系数可表示为:

$$e_t = \sqrt{\frac{w_T}{w_t}} = \sqrt{\frac{w_1^s - (w_2^s - w_3^s)}{w_0}}. \quad (34)$$

4 分析与讨论

滚石的碰撞恢复系数与滚石的入射状态(入射角与入射速度)密切相关,其决定了滚石的入射能量.此外,被撞击物体的变形模量 E_2 会影响滚石冲击力以及撞击时间,从而引起恢复系数的变化.

本节将研究入射速度 v 、入射角度 β_i 和被撞击物体变形模量 E_2 等参数对切向恢复系数的影响.重点讨论切向恢复系数随上述因素的变化规律以及各因素对其影响程度的大小.滚石与防护物体的计算参数根据章广成等(2012)和何思明等(2009)的研究进行取值.

根据表 1 的参数以及公式(13)可得临界入射角约为 30° . 即当 $\beta_i < 30^\circ$ 时,滚石为滚动回弹,当 $\beta_i > 30^\circ$ 时,滚石的回弹方式为滑动.

目前常用的关于切向恢复系数的计算公式是基于刚体理论得出的运动学计算公式(Schwager *et al.*, 2008). 对于滚动回弹状态,由于不存在切向的平动速度,运动学公式认为 e_t 恒等于 0. 滑动回弹阶段按下式计算:

$$e_t = 1 - \mu(1 + e_n) / \tan \beta_i. \quad (35)$$

以下将重点分析各因素对切向恢复系数的影响,并与传统的运动学公式进行对比分析.

4.1 入射速度对切向恢复系数的影响

入射速度是影响碰撞过程的主要因素之一,将入射速度作为影响碰撞的基本要素,研究不同入射速度对切向恢复系数的影响.

图 6 统计了不同入射速度下的切向恢复系数,对于滚动回弹,切向恢复系数随入射速度的增加呈减小的趋势.当 $\beta_i = 1^\circ$ 时, $v = 40 \text{ m/s}$ 的切向恢复系数比 $v = 10 \text{ m/s}$ 的切向恢复系数减小了 26%. 随着入射速度的增加,切向力不断增加,切向不可恢复变形消耗的能量增大,导致切向恢复系数减小.

对于滑动回弹,切向恢复系数随着入射速度的变化很小.当入射角 $\beta_i = 45^\circ$ 时,入射速度 $v = 10 \text{ m/s}$ 的切向恢复系数 $e_t = 0.20$; $v = 40 \text{ m/s}$ 时的 $e_t = 0.17$, 相差 0.03. 入射速度从 10 m/s 变化到 40 m/s 时,不

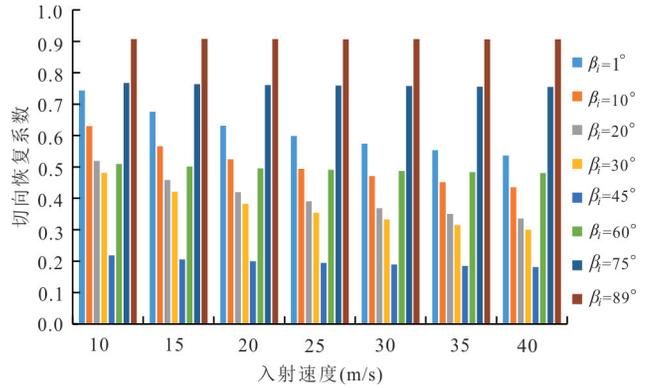


图 6 不同入射速度下的切向恢复系数

Fig.6 Tangential restitution coefficients at different incident velocities

同入射角下的 e_t 变化的幅度维持在 6% 左右.

根据式(27)、(32)、(33)与(34),将滑动回弹的切向恢复系数的理论公式表示为入射速度 v 、入射角度 β_i 、防护物体的变形模量 E_2 的函数,有:

$$e_t = -C_1 \left(\frac{1}{v^{20}} \cdot \frac{\cos^{20} \beta_i}{\tan \beta_i} \cdot E_2^{-\frac{5}{8}} \right) + D_1, \quad (36)$$

式(36)中, C_1 、 D_1 是与滚石以及防护物体的 m 、 f 、 ρ 等参数相关的量.

由式(36)可知,滑动回弹时的切向恢复系数受入射速度 v^{20} 的影响.进一步,将本文基于能量法得出结果的与运动学公式(35)的推导结果的进行对比分析.图 7 为 $\beta_i = 1^\circ$ (滚动回弹)与 $\beta_i = 60^\circ$ (滑动回弹)时入射速度与切向恢复系数的关系.根据式(7)、(9)、(11)、(14), $\beta_i = 1^\circ$ 、 $\beta_i = 60^\circ$ 时滚石撞击的其他特征参量见表 2,表 3.

对于滚动回弹的情况,本文基于能量法得出的切向恢复系数要大于运动学公式得出的值.运动学公式认为,滚石发生滚动回弹时,切向的相对平动速度为 0,切向恢复系数为 0. 本文从能量的损耗的角度出发,认为滚动回弹时,滚石的初始切向动能转化为转动能量.损失的能量是由切向变形造成的.随着冲击速度的增加,切向力增加,切向变形耗

表 1 滚石冲击计算参数

Table 1 Calculation parameters of rock fall impact

滚石			防护物体			
变形模量 E_1 (GPa)	泊松比 μ_1	半径 R (m)	密度 ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	变形模量 E_2 (GPa)	泊松比 μ_2	摩擦系数 f
40	0.2	0.5	2 500	30	0.2	0.5

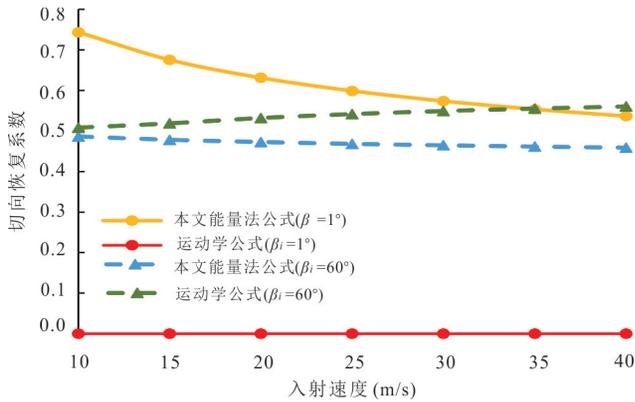


图7 不同入射速度下切向恢复系数变化曲线

Fig.7 Variation of restitution coefficient at different incident velocities

表 2 $\beta_i=1^\circ$ 时不同入射速度碰撞特征量统计

Table 2 Collision typical parameters quantity statistics under different incidence speeds($\beta_i=1^\circ$)

v ($m \cdot s^{-1}$)	t_1 (ms)	T (ms)	$F_{Nmax}/$ MN	$F_{Tmax}/$ MN	恢复系数	
					e_n	e_t
10	1.456	3.058	12.264	0.183	0.622	0.743
15	1.343	2.849	19.95	0.299	0.562	0.675
20	1.267	2.711	28.175	0.423	0.523	0.631
25	1.212	2.609	36.825	0.552	0.495	0.599
30	1.170	2.527	45.832	0.687	0.473	0.573
35	1.133	2.461	55.145	0.826	0.455	0.553
40	1.104	2.405	64.728	0.971	0.439	0.536

表 3 $\beta_i=60^\circ$ 时不同入射速度碰撞特征量统计

Table 3 Collision typical parameters quantity statistics under different incidence speeds($\beta_i=60^\circ$)

v ($m \cdot s^{-1}$)	t_1 (ms)	T (ms)	$F_{Nmax}/$ MN	$F_{Tmax}/$ MN	恢复系数	
					e_n	e_t
10	1.669	3.443	5.403	2.701	0.738	0.509
15	1.539	3.209	8.789	4.394	0.667	0.501
20	1.453	3.052	12.412	6.206	0.621	0.491
25	1.389	2.936	16.224	8.112	0.587	0.487
30	1.340	2.844	20.191	10.095	0.561	0.484
35	1.299	2.769	24.294	12.147	0.540	0.481
40	1.265	2.706	28.516	14.258	0.522	0.476

能增加,恢复系数随之减小.

对于滑动回弹,运动学公式得出的切向恢复系数要大于本文能量法得出的切向恢复系数.除了没有考虑到碰撞过程中变形引起的能量损失外,运动学公式只考虑了碰撞开始与结束这两个时刻的冲

击力与速度.而本文的结论,从能量变化及过程量的角度进行推导的.

由公式(35)可知,运动学的切向恢复系数受法向恢复系数的影响,法向恢复系数 e_n 可表示为入射速度 v 、入射角度 β_i 、防护物体的变形模量 E_2 的函数:

$$e_n = C_2 \left(v^{-\frac{1}{4}} \cdot \cos^{-\frac{1}{4}} \beta_i \cdot E_2^{\frac{1}{8}} \right) + D_2, \quad (37)$$

式(37)中, C_2 、 D_2 是与滚石以及防护物体的 m 、 f 、 ρ 等参数相关的量.

对于滑动回弹,无论是运动学公式的计算结果抑或本文能量法的计算结果,切向恢复系数随入射速度的变化都很小.当入射速度从10 m/s增加到40 m/s时,运动学公式的切向恢复系数增加了11.8%,本文能量法的切向恢复系数减小了5.8%.从式(36)(37)可以看出,运动学的切向恢复系数受 $v^{-\frac{1}{4}}$ 的影响,本文推导的切向恢复系数受 $v^{\frac{1}{20}}$ 的影响,两者随入射速度 v 的变化不明显.

叶四桥等(2018)采用混凝土浇筑的试块进行落石冲击试验,使用高速相机拍摄落石试块碰撞过程的照片,并利用HS-Analysis运动分析软件解析拍摄的照片集,通过对获取的1600个数据进行分析,发现切向恢复系数随入射速度的增加有减小的趋势.这与本文能量法推导的结论一致.

4.2 入射角度对切向恢复系数的影响

为研究入射角对切向恢复系数的影响,以上述案例为基础,研究不同入射角影响下切向恢复系数的变化规律.

图8统计了不同入射角下的滚石切向恢复系数.滚动回弹时,切向恢复系数随入射角的增加而减小.当 $\beta_i=1^\circ$ 时,切向恢复系数的平均值为0.61, $\beta_i=30^\circ$ 时,切向恢复系数的平均值为0.36,减小了39%.随着入射角度的增加,切向力增加,进而引起切向变形耗能的增加.

滑动回弹时,切向恢复系数随入射角的增加而增加.当 $\beta_i=45^\circ$ 时,不同入射速度下的 e_t 约为0.22,当 $\beta_i=60^\circ$, e_t 增加了1倍,为0.45.当 $\beta_i=89^\circ$ 时, $e_t=0.9$,为 $\beta_i=45^\circ$ 时 e_t 的4.5倍.由公式(36)可知,入射

角度对切向恢复系数的影响参数为 $\frac{\cos^{\frac{1}{20}} \beta_i}{\tan \beta_i}$, e_t 负相

关于 $\frac{\cos^{\frac{1}{20}} \beta_i}{\tan \beta_i}$,随着 β_i 的增加, $\frac{\cos^{\frac{1}{20}} \beta_i}{\tan \beta_i}$ 呈减小的趋

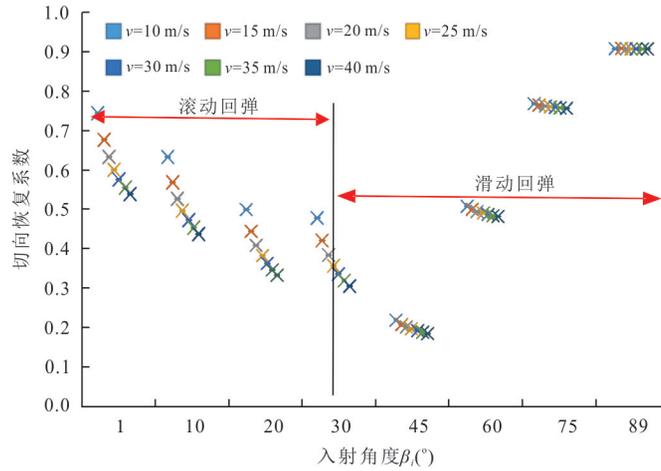


图8 不同入射角下的切向恢复系数

Fig.8 Tangential restitution coefficient at different incident angles

势, e_t 呈增加的趋势.

进一步利用运动学公式的切向恢复系数进行对比分析. 以 $v=20\text{ m/s}$ 时为例, 研究恢复系数随入射角的变化规律, 见图 9. 根据式 (7)、(9)、(11)、(14), 其他碰撞特征参量见表 4.

滚动回弹时, 运动学公式的切向恢复系数为 0. 从能量损耗的角度考虑, 随着入射角的增加, 切向力与切向变形增加, 切向损耗的能量增加, 回弹阶段释放的能量 (主要为滚石的转动能量) 相对减少, 切向恢复系数减小.

滑动回弹时, 运动学公式与本文推导的能量法公式表现出一致的变化性, 切向恢复系数都随入射角度的增加而增加, 并且曲线的斜率也较为一致. 运动学公式中, $\beta_i=45^\circ$ 时, $e_t=0.23$; $\beta_i=89^\circ$ 时, $e_t=0.98$, 变化率为 $0.0179/^\circ$. 在本文推导的公式中, $\beta_i=45^\circ$ 时, $e_t=0.18$; $\beta_i=89^\circ$ 时, $e_t=0.90$, 变化率为

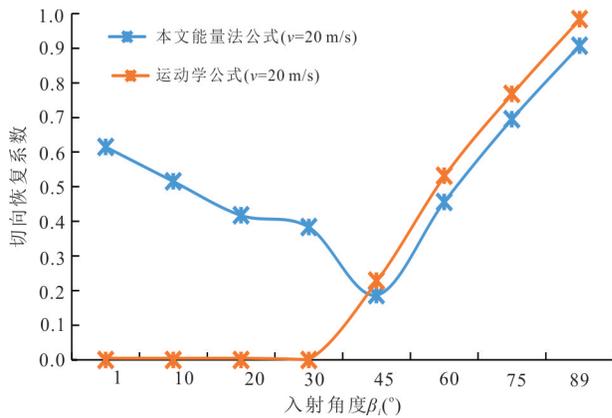


图9 不同入射角下的恢复系数($v=20\text{ m/s}$)

Fig.9 Variation of coefficient of restitution under different incident angles($v=20\text{ m/s}$)

表 4 不同入射角度碰撞特征量统计($v=20\text{ m/s}$)

Table 4 Collision typical parameters quantity statistics under different incident angles($v=20\text{ m/s}$)

β_i ($^\circ$)	t_1 (ms)	T (ms)	$F_{Nmax}/$ MN	$F_{Tmax}/$ MN	恢复系数	
					e_n	e_t
1	1.267	2.708	28.345	0.438	0.523	0.631
10	1.269	2.710	28.004	4.340	0.524	0.524
20	1.281	2.735	26.476	8.472	0.530	0.419
30	1.302	2.774	23.994	11.997	0.541	0.382
45	1.356	2.874	18.810	9.405	0.569	0.193
60	1.453	3.052	12.412	6.206	0.620	0.491
75	1.658	3.423	5.623	2.811	0.731	0.745
89	2.358	4.825	0.221	0.111	0.829	0.907

0.0163/ $^\circ$. 从公式 (35)、(36)、(37) 可以看出, 运动学公式中与入射角度相关的控制参数为 $\frac{\cos^{-\frac{1}{4}}\beta_i}{\tan\beta_i}$, 而本文推导的公式中与入射角度相关的控制参数为 $\frac{\cos^{\frac{1}{20}}\beta_i}{\tan\beta_i}$. 当 β_i 变化时, 无论是 $\cos^{-\frac{1}{4}}\beta_i$ 还是 $\cos^{\frac{1}{20}}\beta_i$ 都在很小的范围内变化, 切向恢复系数更多是受 $\tan\beta_i$ 的影响. 因此, 两公式在变化规律与变化速率上表现出一致性.

由式 (7)、(9)、(10) 及 (36) 可知, 摩擦耗能随入射速度的增加而减小, 随入射角度的增加而减小. 这与 Kharaz *et al.* (2001) 的研究结果一致. 变形耗能随入射速度的增加而增加, 这是由于切向力的增加造成的. 进一步, 定义耗能比例系数 S , 表示滑动回弹过程中摩擦耗能与变形耗能的比值, $S=$

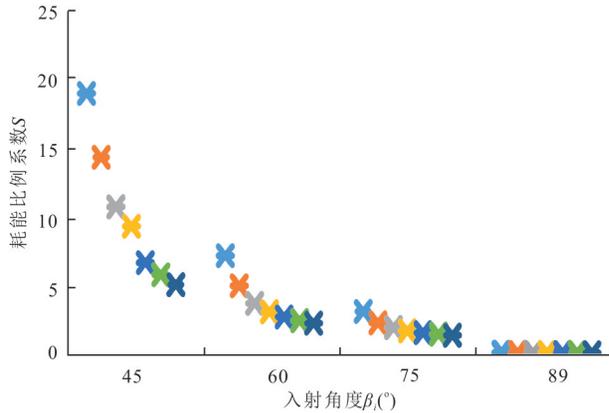


图 10 不同入射角下的耗能比例系数 S

Fig.10 The energy dissipation proportional coefficient S at different incident angles

$$\frac{\omega^0 - \omega_1^s}{\omega_2^s - \omega_3^s}$$

整体上看,摩擦耗能在能量损失中占据主导.随着入射角的增加,摩擦耗能与变形耗能的比值不断减小.入射角的增加,引起切向力的减小(表 4),摩擦耗能减小,两者的比值减小.

4.3 防护物体的变形模量对切向恢复系数的影响

被撞击物体的变形能力也会对碰撞回弹产生影响,为了研究被撞击物体的变形模量对滚石切向恢复系数的影响,将 E_2 的取值范围从 10 MPa 设置到 40 GPa,是为了表征被撞击物体从土体坡面到基岩(或混凝土结构)的变化特征.

以下将研究被撞击物体的变形模量对切向恢复系数的影响规律($v=20 \text{ m/s}, \beta_i=60^\circ$),并将结果与运动学公式推导的结果进行对比分析.

表 5 不同被撞击物体变形模量碰撞特征量

Table 5 Collision typical parameters quantity statistics under deformation modulus of different objects impacted ($v=20 \text{ m/s}, \beta_i=60^\circ$)

E_2 (MPa)	t_1 (ms)	T (ms)	$F_{N\max}/$ MN	$F_{T\max}/$ MN	恢复系数	
					e_n	e_t
10	28.578	69.193	0.631	0.315	0.173	0.352
50	15.018	35.519	1.201	0.601	0.211	0.389
100	11.387	26.663	1.584	0.792	0.230	0.405
200	8.638	20.024	2.088	1.044	0.251	0.421
500	6.005	13.736	3.002	1.501	0.283	0.441
1 000	4.574	10.353	3.943	1.972	0.311	0.455
10 000	1.971	4.278	9.151	4.575	0.457	0.483
40 000	1.453	3.052	12.412	6.206	0.621	0.563

从图 11 可以看出,本文推导的 e_t 随 E_2 的增加呈增大的态势,当 $E_2=10 \text{ MPa}$ 时, $e_t=0.346$, $E_2=40 \text{ GPa}$ 时, $e_t=0.551$. 由公式(36)可知, e_t 负相关于 $E_2^{-\frac{5}{8}}$, 随着 E_2 的增加, $E_2^{-\frac{5}{8}}$ 减小, e_t 增加. 这与 Day (1997)、陈宇龙(2013)研究得出的结论:当地面岩土体从松散土体向基岩变化时,相应法向和切向恢复系数不断增加.保持一致.

此外,当 $\frac{E_2}{E_1} < 0.01$ 时,基于运动学公式与本文能量法得出的切向恢复系数的差值 Δe_t 相差较大,而当 $0.01 < \frac{E_2}{E_1} < 1$ 时, Δe_t 为 0.1 左右. 这种差异是由切向变形量引起的,图 11 统计了最大切向变形量与 E_2 之间的关系,图 11 中以 $E_2=40 \text{ GPa}$ 时的切向

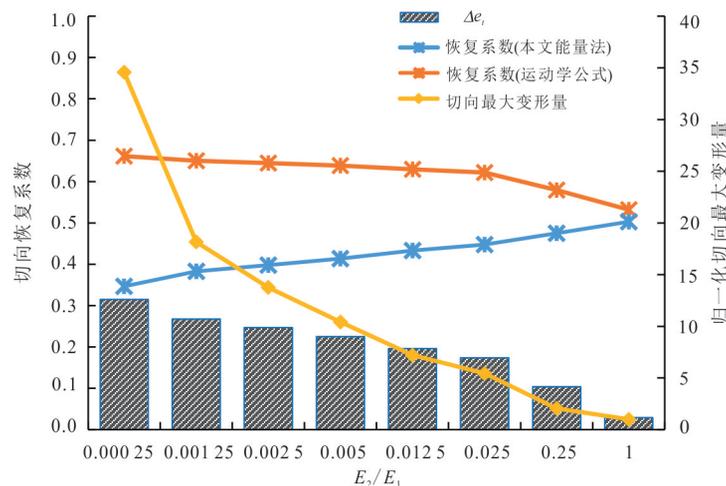


图 11 恢复系数随 E_2/E_1 变化曲线

Fig.11 Variation of coefficient of restitution under different ratios of E_2/E_1

最大变形量为标准,将各工况下的最大切向变形量进行归一化处理.可见,随着 E_2 的增加,切向的最大变形量呈减小的趋势, $E_2=1$ GPa时的切向最大变形量为 $E_2=40$ GPa时的5倍,为 $E_2=10$ MPa时的0.17倍.因此,当被撞击物体为土体($\frac{E_2}{E_1}$ 较小)时,切向变形量 ϵ 与变形耗能会很大,而运动学公式基于刚体理论,不考虑变形问题,从而使得 Δe_i 偏大.而当 $\frac{E_2}{E_1}$ 不断增大时,切向变形量 ϵ 与变形耗能不断减小,两条曲线不断趋近.

5 结论

在滚石非完全弹性碰撞回弹的过程中,提出了基于入射角度变化的切向力模型;考虑到碰撞回弹过程中的摩擦耗能以及变形耗能,从能量的角度出发,推导出切向恢复系数的表达式,通过算例分析,可得到以下结论.

(1)滚石的初始运动状态(入射速度与入射角)决定冲击力的大小与碰撞时间,从而影响滚石碰撞回弹过程中的能量损失.

(2)滚石滚动回弹时,切向恢复系数主要受切向变形的影响,切向变形量越大,损失的能量越多,恢复系数越小.

(3)滚石滑动回弹时,入射速度、入射角度、被撞击物体的变形模量对切向恢复系数的影响参数分别为 v_{20} 、 $\frac{\cos^{20}\beta_i}{\tan\beta_i}$ 、 $E_2^{-\frac{5}{8}}$,切向恢复系数随入射速度的增加而减小,随入射角度及被撞击物体变形模量的增加而增加.其中入射速度对切向恢复系数的影响较小,入射角度对切向恢复系数的影响最大.

(4)本文得到的切向恢复系数理论公式与相应结论可为防护结构的设计提供理论支持,也为滚石灾害定量评价提供理论依据.

References

Azzoni, A., de Freitas, M.H., 1995. Experimentally Gained Parameters, Decisive for Rock Fall Analysis. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 28(2): 111–124. <https://doi.org/10.1007/bf01020064>

Brizmer, V., Kligerman, Y., Etsion, I., 2006. The Effect of Contact Conditions and Material Properties on the Elasticity Terminus of a Spherical Contact. *International*

Journal of Solids and Structures, 43(18): 5736–5749.

Buzzi, O., Giacomini, A., Spadari, M., 2012. Laboratory Investigation on High Values of Restitution Coefficients. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 45(1): 35–43. <https://doi.org/10.1007/s00603-011-0183-0>

Cagnoli, B., Manga, M., 2003. Pumice–Pumice Collisions and the Effect of the Impact Angle—Art.No.1636. *Geophysical Research Letters*, 30(12): 1636.

Chau, K., Wong, R., Wu, J., 2002. Coefficient of Restitution and Rotational Motions of Rockfall Impacts. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39(1): 69–77.

Chen, Y.L., 2013. Influence of Key Factors on Trajectories of Rockfalls. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 35(Suppl.2): 191–196(in Chinese with English abstract).

Chen, Y.Q., Wang, Q.C., 2018. Correction Calculation of Impact Force of Rockfall Based on Hertz Contact Theory and Thornton Elastoplasticity Hypothesis. *Science Technology and Engineering*, 18(13): 37–41(in Chinese with English abstract).

Day, R.W., 1997. Case Studies of Rockfall in Soft versus Hard Rock. *Environmental and Engineering Geoscience*, 3(1): 133–140.

Dussauge, C., Grasso, J., Helmstetter, A., 2003. Statistical Analysis of Rockfall Volume Distributions: Implications for Rockfall Dynamics. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 108(B6): ETG2-1–ETG2-11.

Giani, G.P., Giacomini, A., Migliazza, M., et al., 2004. Experimental and Theoretical Studies to Improve Rock Fall Analysis and Protection Work Design. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 37(5): 369–389. <https://doi.org/10.1007/s00603-004-0027-2>

He, S.M., Wu, Y., Li, X.P., 2009. Research on Restitution Coefficient of Rock Fall. *Rock and Soil Mechanics*, 30(3): 623–627(in Chinese with English abstract).

He, S.M., Zhuang, W.L., Zhang, X., et al., 2013. Research on Rockfall Impact Prevention of Chediguan Bridge Pier, Duwen Road. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 32(Suppl. 2): 3421–3427(in Chinese with English abstract).

Hu, X.L., Tang, H.M., Zhu, L.X., 2011. Collapse Mode and Mechanism of High Magmatite Rock Slope in Wenchuan Epicentral Area. *Earth Science*, 36(6): 1149–1154(in Chinese with English abstract).

Kharaz, A., Gorham, D., Salman, A., 2001. An Experimental Study of the Elastic Rebound of Spheres. *Powder Tech-*

- nology, 120(3): 281–291.
- Labrousse, V., Heidenreich, B., 2009. Half-Scale Experimental Study of Rockfall Impacts on Sandy Slopes. *Natural Hazards and Earth System Science*, 9(104): 1981–1993.
- Liu, X.F., Zhao, Y.Q., Wang, X.R., et al., 2022. Current Status and Prospects of Research on Fatigue Damage and Failure Precursors of Rocks. *Earth Science*, 47(6): 2190–2198(in Chinese with English abstract).
- Liu, Y.J., 2002. Study on Fluidifying Theory of Large High-speed Rockslide (Dissertation). Southwest Jiaotong University, Chengdu(in Chinese with English abstract).
- Luo, G., Cheng, Q.G., Shen, W.G., et al., 2022. Research Status and Development Trend of the High-Altitude Extremely-Energetic Rockfalls. *Earth Science*, 47(3): 913–934(in Chinese with English abstract).
- Lü, Q., Sun, H.Y., Zhai, S.K., et al., 2003. Evaluation Models of Rockfall Trajectory. *Journal of Natural Disasters*, 12(2): 79–84 (in Chinese with English abstract).
- Maw, N., Barber, J.R., Fawcett, J.N., 1976. The Oblique Impact of Elastic Spheres. *Wear*, 38(1): 101–114.
- Mangwandi, C., Cheong, Y., Adams, M., et al., 2007. The Coefficient of Restitution of Different Representative Types of Granules. *Chemical Engineering Science*, 62(1): 437–450.
- Mei, X.F., Hu, X.W., Luo, G., et al., 2019. A Study on the Coefficient of Restitution and Peak Impact of Rockfall Based on the Elastic-Plastic Theory. *Journal of Vibration and Shock*, 38(8): 14–20(in Chinese with English abstract).
- Mindlin, R.D., 1949. Compliance of Elastic Bodies in Contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16(3): 259–268.
- Qin, Z.Y., Lu, Q.S., 2006. Analysis of Impact Process Model Based on Restitution Coefficient. *Journal of Dynamics and Control*, (4): 294–298(in Chinese with English abstract).
- Scheiner, S., Pichler, B., Hellmich, C., et al., 2006. Loading of Soil-Covered Oil and Gas Pipelines Due to Adverse Soil Settlements: Protection against Thermal Dilatation-Induced Wear, Involving Geosynthetics. *Computers and Geotechnics*, 33(8): 371–380.
- Schwager, T., Becker, V., Pöschel, T., 2008. Coefficient of Tangential Restitution for Viscoelastic Spheres. *The European Physical Journal E, Soft Matter*, 27(1): 107–114. <https://doi.org/10.1140/epje/i2007-10356-3>
- Seifried, R., Schiehlen, W., Eberhard, P., 2005. Numerical and Experimental Evaluation of the Coefficient of Restitution for Repeated Impacts. *International Journal of Impact Engineering*, 32(1): 508–524.
- Vu-Quoc, L., Lesburg, L., Zhang, X., 2004. An Accurate Tangential Force-Displacement Model for Granular-Flow Simulations: Contacting Spheres with Plastic Deformation, Force-Driven Formulation. *Journal of Computational Physics*, 196(1): 298–326. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.10.025>
- Wang, Y.S., Cheng, W.Q., Liu, J.W., 2022. Forming Process and Mechanisms of Geo-Hazards in Luding Section of the Sichuan-Tibet Railway. *Earth Science*, 47(3): 950–958(in Chinese with English abstract).
- Wu, C.Y., Li, L.Y., Thornton, C., 2003. Rebound Behavior of Spheres for Plastic Impacts. *International Journal of Impact Engineering*, 28:929–946.
- Yang, H.Q., Zhou, X.P., 2009. A New Approach to Calculate Trajectory of Rockfall. *Rock and Soil Mechanics*, 30(11): 3411–3416(in Chinese with English abstract).
- Ye, S.Q., Gong, S.Q., 2015. Research on Normal Restitution Coefficient of Rockfall Collision by Model Tests. *China Railway Science*, 36(4): 13–19(in Chinese with English abstract).
- Ye, S.Q., Gong, S.Q., Wang, L.F., et al., 2018. Research on Value of Tangential Restitution Coefficient for Rockfall Collision. *China Railway Science*, 39(1): 8–15(in Chinese with English abstract).
- Zhang, L.Q., Yang, Z.F., Xu, B., 2004. Rock Falls and Rock Fall Hazards. *Journal of Engineering Geology*, 12(3): 225–231 (in Chinese with English abstract).
- Zhang, G.C., Tang, H.M., Xiang, X., 2012. Characteristic Parameters Theoretical Analysis of Rockfall Impact on Ground. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 31(Suppl. 1): 2839–2846(in Chinese with English abstract).
- Zhang, G.C., Xiang, X., Tang, H.M., 2011. Field Test and Numerical Calculation of Restitution Coefficient of Rockfall Collision. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 30(6): 1266–1273(in Chinese with English abstract).

附中文参考文献

- 陈颖骐, 王全才, 2018. 基于 Hertz 弹性理论和 Thornton 弹性假设的滚石冲击力的修正计算. *科学技术与工程*, 18(13): 37–41.
- 陈宇龙, 2013. 滚石运动过程中关键参数的影响分析. *岩土工程学报*, 35(增刊 2): 191–196.

- 何思明,吴永,李新坡,2009.滚石冲击碰撞恢复系数研究.岩土力学,30(3):623-627.
- 何思明,庄卫林,张雄,等,2013.都汶公路彻底关大桥桥墩抗滚石冲击防护研究.岩石力学与工程学报,32(增刊2):3421-3427.
- 胡新丽,唐辉明,朱丽霞,2011.汶川震中岩浆岩高边坡破坏模式与崩塌机理.地球科学,36(6):1149-1154.
- 刘新锋,赵英群,王晓睿,等,2022.岩石疲劳损伤及破坏前兆研究现状与展望.地球科学,47(6):2190-2198.
- 刘涌江,2002.大型高速岩质滑坡流体化理论研究(博士论文).成都:西南交通大学.
- 罗刚,程谦恭,沈位刚,等,2022.高位高能岩崩研究现状与发展趋势.地球科学,47(3):913-934.
- 吕庆,孙红月,翟三扣,等,2003.边坡滚石运动的计算模型.自然灾害学报,12(2):79-84.
- 梅雪峰,胡卸文,罗刚,等,2019.基于弹塑性理论的落石碰撞恢复系数和峰值冲击力研究.振动与冲击,38(8):14-20.
- 秦志英,陆启韶,2006.基于恢复系数的碰撞过程模型分析.动力学与控制学报,(4):294-298.
- 王运生,程万强,刘江伟,2022.川藏铁路廊道泸定段地质灾害孕育过程及成灾机制.地球科学,47(3):950-958.
- 杨海清,周小平,2009.边坡落石运动轨迹计算新方法.岩土力学,30(11):3411-3416.
- 叶四桥,巩尚卿,2015.落石碰撞法向恢复系数的模型试验研究.中国铁道科学,36(4):13-19.
- 叶四桥,巩尚卿,王林峰,等,2018.落石碰撞切向恢复系数的取值研究.中国铁道科学,39(1):8-15.
- 张路青,杨志法,许兵,2004.滚石与滚石灾害.工程地质学报,12(3):225-231.
- 章广成,唐辉明,向欣,2012.冲击地面过程中落石特征参量的理论分析.岩石力学与工程学报,31(增刊1):2839-2846.
- 章广成,向欣,唐辉明,2011.落石碰撞恢复系数的现场试验与数值计算.岩石力学与工程学报,30(6):1266-1273.