# 附件1：产状一维观测数据和三维概率分布的数值解关系式的推导

近年来，许多研究都致力于获得更加精确的岩体产状分布估计（Fouché andDiebolt, 2004; Tang et al., 2016）。尽管相关学者在这一领域已做了大量工作，关于如何获取裂隙产状在三维空间内的概率分布解仍需进一步研究。本附录推导了一种测线法获得的产状一维观测数据和三维概率分布之间函数关系式。

对于存在于岩体内三维空间中的裂隙，其倾向和倾角的联合概率密度函数为：

(A1)

式中，$α$和$β$分别为裂隙的倾向和倾角；$Ψ$和$ζ$分别为测线的倾伏向和倾伏角；$p\_{A}(α,β)$为倾向和倾角在三维空间内的联合概率密度；$p\_{AB}(α,β)$为测线法测得的倾向和倾角的联合概率密度；*k*为待定系数。

倾向在三维空间内的概率密度函数可以通过对式A1中的$p\_{A}(α,β)$在整个倾角区间内积分得到：

(A2)

式中，$p\_{A}(α)$为倾向在三维空间内的概率密度函数；$β\_{min}$和$β\_{max}$分别为测线法获得的倾角最小值和最大值。

假设测线法获得的倾向和倾角之间满足相互独立的假设，则测线法获得的倾向和倾角的联合概率密度可以表示为倾向概率密度和倾角概率密度之积：

(A3)

式中，和分别为测线法获得的倾向和倾角的概率密度函数。

将式A3代入式A2得：

(A4)

式中，待定系数$k$的求解如下。

任意变量的概率密度函数对其全域的积分值恒为1，即

(A5)

式中，$α\_{min}$和$α\_{max}$分别为测线法所测得的倾向的最小值和最大值。

将式A4代入式A5中，解得$k$为：

(A6)

将式A6代入式A4中，得到倾向在三维空间内的概率密度：

(A7)

倾向在三维空间内的累积分布函数可以通过对式A7中的概率密度函数积分求得：

(A8)

与式A7类似，倾角在三维空间内的概率密度函数可表示为：

(A9)

与式A8类似，倾角在三维空间内的累积分布函数可表示为：

(A10)

在式A7中，积分项难以转化为解析解的形式，同样的问题也存在于式A8中积分项、式A9中积分项和式A10中积分项。为解决这一问题，本文提出如下一种近似数值解。

假设通过测线法获得了含有$n$个裂隙产状的样本，不妨设倾向/倾角为$α\_{1}/β\_{1}$ ,$α\_{2}/β\_{2}$,$α\_{3}/β\_{3}$, …,$α\_{n}/β\_{n}$，且$α\_{1}\leq α\_{2}\leq α\_{3}\leq …\leq α\_{n},β\_{1}\leq β\_{2}\leq β\_{3}\leq …\leq β\_{n}$。根据统计学原理，样本落入被数据划分的各个区间内的概率都是均等的，具体表示为：

对于倾向：

,  (A11)

对于倾角：

,  (A12)

式中，$P\_{AB}(α\_{j}<α<α\_{j+1})$为测线法测得倾向在区间$ (α\_{j},α\_{j+1}]$内的概率；$P\_{AB}(β\_{k}<β<β\_{k+1})$为测线法测得倾角在区间$(β\_{k},β\_{k+1}]$内的概率。

式A11中的被积函数可近似表示为：

,  (A13)

同样，式A12中的被积函数可近似表示为：

,  (A14)

然后，将式A14代入式A7中的积分项



(A15)

式A15中的积分项难以求解。因此，为了获得可积分的形式，下面将尝试两种转化方法。

方法一

将式A15转化为如下形式：

(A16)

其中

(A17)

式A16中的定积分

(A18)

将式A18代入式A16，再将新的式子代入式A7后将导致判断准则$\sin(\left(β-∅\right)>0)$和解都十分复杂。为了得到更有效的解，下面将尝试第二种方法。

方法二

式A15可以重写为



(A19)

与方法一相比，采用式A19的方法二更为简洁。

将式A13和式A19代入式A7的分子，得：



; (A20)

将式A20代入式A7的分母，得：

(A21)

然后，将式A20和式A21代入式A7，得到倾向在三维空间内的概率密度（分段函数形式）：

,

;  (A22)

因此，倾向在三维空间内的累积概率函数可表示为：

,

 (A23)

同理，倾角在三维空间内的累积概率函数可表示为：

,

(A24)

References

Fouché, O.,Diebolt,J.,2004. Describing the geometry of 3D fracture systems by correcting for linear sampling bias. *Mathematical Geology*, 36 (1)：33-63.

Tang,H.M.，Huang,L.，Bobet,A.,et al.,2016. Identification and Mitigation of Error in the Terzaghi Bias Correction for Inhomogeneous Material Discontinuities. *Strength of Materials*，48 (6)：825-833.